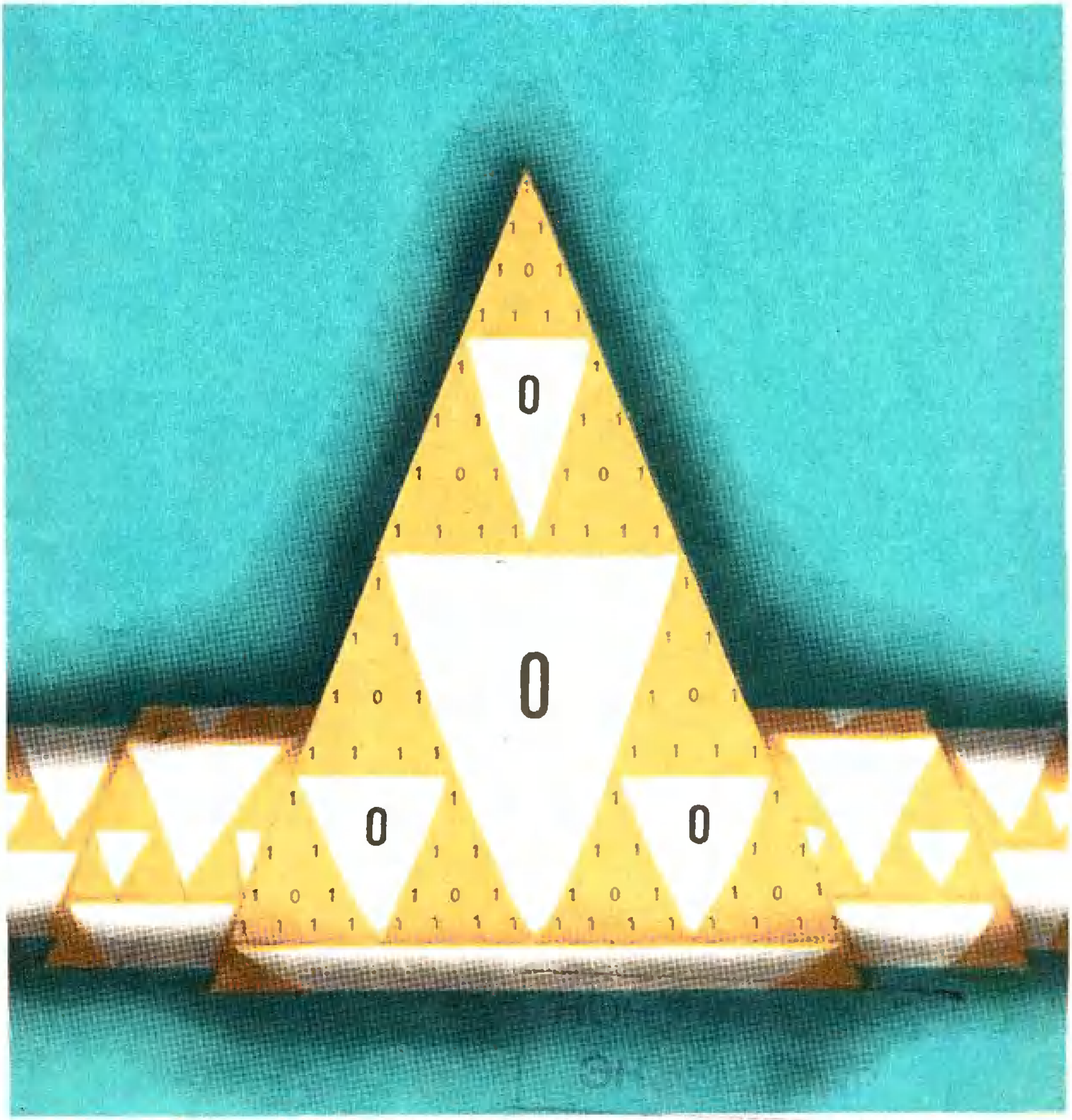
Научно-популярный физико-математический

# Квант

6

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР

1970



Заведующая редакцией *Л. В. Чернова*
Главный художник *Е. П. Леонов*
Технический редактор *Т. М. Макарова*
Корректоры *Н. Б. Мамулова, Г. С. Смоликова*
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-07-93   234-08-11

Сдано в набор 8. 04. 70 г.
Подписано в печать 22.06.70 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4.
Условн. печ. л.5,20. Уч.-изд. л. 6,12.
Тираж 206270 экз.
Цена 30 коп.   Заказ 568   Т-09760
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов, Московской области

Научно-популярный физико-математический

# 6

# Квант

журнал Академии наук СССР
Академии педагогических наук СССР

В НОМЕРЕ:

# СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

И. М. Яглом

## § 1. Ключевые числа

**ПЕРВЫЕ ДЕВЯТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ МЫ ОБОЗНАЧАЕМ СПЕЦИАЛЬНЫМИ ЗНАКАМИ**

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.**

Поступать таким же образом со всеми встречающимися на практике числами было бы неудобно. Даже если бы наши потребности ограничивались счетом в пределах тысячи, надо было бы запомнить тысячу специальных знаков. Естественно, что уже давно люди стали выбирать тот или иной ряд «ключевых» чисел и только их обозначать специальными знаками. Такова, например, римская система счисления (нумерации), основанная на ключевых числах

$$1,\ 5,\ 10,\ 50,\ 100,\ 500 \text{ и } 1000.$$

Эти числа в римской системе счисления обозначают буквами I («и»), V(«ве»), X («икс»), L («эль»), C («це»), D («де») и M («эм»).


Такие обозначения частично произошли от рисунков, изображавших некогда соответствующие числительные (I — палец, V — пятерня с расставленными пальцами, X — две пятерни), а частично являются сокращениями латинских слов (centum — сто, demimille — пятьсот, mille — тысяча).

Так как римская система нумерации нужна нам только для примера, мы рассмотрим ее в более древнем, упрощенном варианте, когда число «четыре» писалось в виде IIII, а не в виде IV. Число 3477 в этой староримской системе записывается так:

$$\text{MMMCCCCLXXVII} = 3\cdot 1000 + 4\cdot 100 + 50 + 2\cdot 10 + 5 + 2.$$

Аналогично поступает кассир, имеющий денежные купюры достоинством в 100 рублей, 50 рублей, 25 рублей, 10 рублей, 5 рублей, 3 рубля и 1 рубль. Для кассира ключевыми являются числа

$$100,\ 50,\ 25,\ 10,\ 5,\ 3 \text{ и } 1.$$

Желая выплатить, скажем, 499 рублей, он выдает сначала столько сотенных бумажек, сколько возможно, чтобы не выдать лишнего:

$$499 = 4\cdot 100 + 99.$$

Затем он выдает столько купюр по 50 рублей, сколько возможно, чтобы выдать не более оставшихся к выплате 99 рублей:

$$499 = 4\cdot 100 + 1\cdot 50 + 49,$$

и т. д. Иногда у него может получиться остаток меньше, чем следующее ключевое число. Так будет в нашем примере после выдачи двух десятирублевок:

$$499 = 4\cdot 100 + 1\cdot 50 + 1\cdot 25 + 2\cdot 10 + 4.$$

Следующее ключевое число равно 5, однако, так как $4 < 5$, то пятирублевок выдавать не придется. Но для полноты картины можно считать, что было выдано 0 пятирублевок, и включить в сумму слагаемое $0\cdot 5$. Вся процедура выдачи 499 рублей запишется так:

$$499 = 4\cdot 100 + 1\cdot 50 + 1\cdot 25 + 2\cdot 10 + 0\cdot 5 + 1\cdot 3 + 1\cdot 1.$$

Попробуем теперь обобщить сказанное, взяв в качестве последовательности ключевых чисел («базиса») любую последовательность возрастающих натуральных чисел:

$$q_0 = 1 < q_1 < q_2 < \ldots < q_n < \ \ldots \quad (1)$$

Опишем, как получить запись произвольного числа $N$ *в системе счисления с базисом* (1).

В последовательности (1) ключевых чисел находим самое большое число $q_n$, не превосходящее $N$. Делим $N$ на $q_n$ и получаем (неполное) частное $a_n$ и остаток $r_{n-1}$:

$$N = a_n q_n + r_{n-1}, \quad \text{где } 0 \leqslant r_{n-1} < q_n.$$

Первый остаток $r_{n-1}$ делим на следующее ключевое число $q_{n-1}$. Получаем

$$r_{n-1} = a_{n-1}q_{n-1} + r_{n-2}, \quad \text{где } 0 \leqslant r_{n-2} < q_{n-1},$$

или

$$N = a_n q_n + a_{n-1}q_{n-1} + r_{n-2}.$$

(Заметьте, что мы не исключаем здесь и тот случай, когда $r_{n-1} = 0$, — в этом случае все последующие частные и остатки будут равны нулю!) Теперь новый остаток $r_{n-2}$ делим на $q_{n-2}$; мы получаем

$$r_{n-2}=a_{n-2}q_{n-2}+r_{n-3},$$

где

$$0\leqslant r_{n-3}<q_{n-2},$$

или

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+a_{n-2}q_{n-2}+r_{n-3}$$

и т. д.

В конце концов, разделив предпоследний остаток $r_1$ на $q_1$, получаем

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\dots$$
$$\dots+a_2q_2+a_1q_1+r_0,$$

где $0\leqslant r_0<q_1$.

(Так как $q_0=1$, то делить на него «последний остаток» $r_0$ излишне: ясно, что $r_0=a_0q_0=a_0$.)

Практически подобное многократное деление обычно записывают слитно. Как это делается, мы покажем на уже разобранном примере записи суммы в 499 руб. в «системе кассира»:

$$\begin{array}{r|l}
499 & 100 \\
\underline{400} & \overline{4} \\
99 & 50 \\
\underline{50} & \overline{1} \\
49 & 25 \\
\underline{25} & \overline{1} \\
24 & 10 \\
\underline{20} & \overline{2} \\
4 & 5 \\
\underline{0} & \overline{0} \\
4 & 3 \\
\underline{3} & \overline{1} \\
1 & 1 \\
\underline{1} & \overline{1} \\
0 &
\end{array}$$

т. е. $499=4\cdot100+1\cdot50+1\cdot25+$
$+2\cdot10+0\cdot5+1\cdot3+1\cdot1.$

(Здесь все частные $a_n$, $a_{n-1}$ и т. д. набраны красными цифрами, а само число $N$ и остатки $r_{n-1}$, $r_{n-2}$ и т. д. — синими.)

## § 2. Позиционные системы счисления

Вероятно, вы уже догадались, что в случае базиса

$$q_0=1,\quad q_1=10,$$
$$q_2=10^2,\ \dots,\ q_n=10^n,\ \dots$$

мы будем иметь дело с общеупотребительной **десятичной** системой счисления. Но вместо того, чтобы писать, скажем,

$$4\cdot10^5+0\cdot10^4+3\cdot10^3+0\cdot10^2+$$
$$+1\cdot10+7$$

мы пишем просто 403017.

Рассеянный или чересчур пунктуальный кассир мог бы приготовить для записи своих выдач ведомость, где число выданных купюр разного достоинства заносилось бы в отдельные столбцы. В такой ведомости выдача 499 рублей выглядела бы так:

| | 100 | 50 | 25 | 10 | 5 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 499 | 4 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 |

Можно сказать, что в «системе счисления кассира» число 499 записывается в виде

4112011.

Системы счисления, родственные разобранным в последних двух примерах (т. е. десятичной системе счисления и «системе кассира»), называются *позиционными* (о значении этого выражения мы еще скажем ниже). Вместо громоздкой записи

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\cdots$$
$$\cdots+a_2q_2+a_1q_1+a_0$$

в позиционной системе счисления с базисом (1) удобно пользоваться более компактной записью из $n+1$ «цифры»:

$$«a_na_{n-1}\dots a_2a_1a_0».$$

При этом предполагается, что «цифры» $a_k$ получены тем способом (алгоритмом), который был описан выше.

Из этого описания ясно, что в заданном базисе каждое натуральное число $N$ записывается единственным образом. Далее, так как «старшая цифра» $a_n$ получается как частное от деления на $q_n$ числа $N$, которое по условию меньше $q_{n+1}$ (ибо иначе мы начали бы с деления $N$ на $q_{n+1}$, а не на $q_n$!), то $a_n<q_{n+1}/q_n$. Поэтому,

если частное $q_{n+1}/q_n$ заключено между целыми числами $A$ и $A-1$:

$$A-1<\frac{q_{n+1}}{q_n}\leqslant A,$$

то «цифра» $a_n$ не превосходит $A-1$, т. е. она может принимать $A$ значений:

$a_n=0$, или 1, или 2, ..., или $A-1$. (Впрочем для старшей цифры числа значение $a_n=0$ также можно исключить.)

Аналогично цифра $a_{n-1}$ получается в процессе деления «первого остатка» $r_{n-1}$ на $q_{n-1}$. Но так как $r_{n-1}<q_n$, то

$$a_{n-1}<\frac{q_n}{q_{n-1}}.$$

Это рассуждение можно распространить и на все другие цифры. В частности, так как последняя цифра $a_0$ просто совпадает с «последним остатком» $r_0$, полученным при делении на $q_1$, то $a_0$ может принимать $q_1$ значений:

$a_0=0$, или 1, или 2, ..., или $q_1-1$.

До позиционной системы счисления люди дошли не сразу. Одним из затруднений долго было отсутствие числа «нуль» (и специального знака для этого числа). Впервые знак нуля появился в рамках *вавилонской* шестидесятеричной системы счисления. В вавилонских текстах, написанных характерной «клинописью» (см.

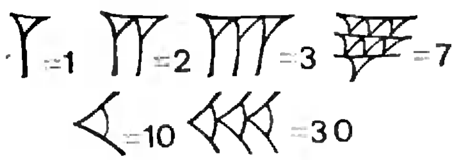


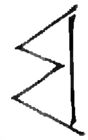

рисунок), числа от 1 до 59 записывались по десятичной системе.

Но основной для вавилонской математики была шестидесятеричная система счисления с базисом

$$1,\ 60,\ 60^2,\ 60^3,\ \ldots,\ 60^n,\ \ldots$$

До мысли иметь специальный знак «нуля» математики, пользовавшиеся клинописью, дошли довольно поздно (впрочем, заведомо не позднее третьего века до нашей эры).

Знак нуля выглядел так:

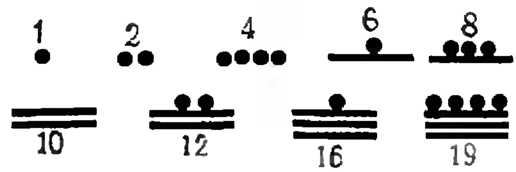


Вы поймете после этих разъяснений, что запись

означает число

$$2593292=12\cdot60^3+0\cdot60^2+ +21\cdot60+32.$$

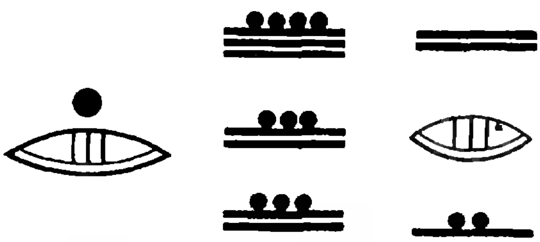
Очень близка к вавилонской система счисления, принятая в древней цивилизации индейцев *майя*, обитавших на территории Центральной Америки. Создание этой системы счисления относится к началу нашей эры. Если вавилонская система счисления имела комбинированный десятично-шестидесятеричный характер, то система майя была пятерично-двадцатеричной. Первые 19 чисел записывались комбинированием черточки, обозначавшей пятерку, и точки (единицы):




Но основную роль играла искаженная двадцатеричная система счисления. При записи числа «цифры» подписывались одна под другой, причем старшей являлась верхняя цифра. Прилагательное «искаженная» означает вот что: третье — после 1 и 20 — ключевое число в системе майя равнялось не $20\cdot20=20^2$, а $18\cdot20=360$; далее шли $18\cdot20^2$, $18\cdot20^3$, $18\cdot20^4$.

Существовало и специальное обозначение для нуля, напоминавшее полузакрытый глаз:

Вот несколько примеров записи чисел в системе майя:



$\{1 \cdot 20 + 0 = 20, \quad 19 \cdot 360 + 13 \cdot 20 + 13 = 7\,113, \quad 10 \cdot 360 + 7 = 3\,607\}$

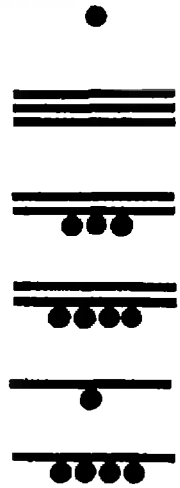
Основное отличие записи чисел в вавилонской системе счисления и по системе майя от римской нумерации как раз и заключается в «позиционном» принципе этих систем: в то время как у римлян буква I всегда означает единицу, а V — пятерку, независимо от того, где эти буквы стоят, у древних вавилонян и у индейцев майя значение «цифры» существенно зависит от занимаемого ею места, или «позиции». Именно поэтому такие системы записи чисел (к числу которых принадлежит и общераспространенная «десятичная система», созданная в Индии в VIII—IX вв. или немного раньше) называют позиционными.

### Упражнения

1. Записать в «полной системе кассира» (где «ключевыми» являются следующие числа 10000, 5000, 2500, 1000, 500, 300, 100, 50, 20, 15, 10, 5, 3, 2 и 1, отвечающие выраженным в копейках ценностям всех существующих бумажных денег и всех монет) сумму в 233 руб 87 коп. Записать операцию перевода 23387 коп. в «систему кассира» с помощью «непрерывного деления» (см. стр. 4).

2. Прочесть записанное по вавилонской системе число

3. Прочесть записанное по системе майя число



(Это самое большое число, обнаруженное в памятниках культуры майя.)

## § 3. Системы счисления с заданным основанием

Так называются системы счисления с базисом

$$q_0 = d^0 = 1, \quad q_1 = d^1 = d, \quad q_2 = d^2, \quad q_3 = d^3, \quad q_4 = d^4, \ \ldots, \qquad (2)$$

где $d$ — любое целое число, большее единицы. Это число $d$ называется *основанием* системы счисления.

К числу таких систем принадлежит обычная десятичная система счисления с основанием $d=10$, вавилонская шестидесятеричная ($d=60$) и получившая широкое применение в последнее время в связи с нуждами вычислительной техники двоичная система счисления ($d=2$). В случае произвольного основания $d$ говорят о «$d$-ичной» системе счисления.

В $d$-ичной системе счисления запись $N = «a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»$ имеет следующий смысл:

$$N = a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + \cdots + a_2 d^2 + a_1 d + a_0$$

Ясно, что каждая цифра в записи числа по $d$-ичной системе счисления может принимать лишь $d$ значений: 0, или 1, или 2, или 3, ..., или $d-1$. В частности, если $d=10$ и, следовательно, базис системы счисления имеет вид

$$q_0=1,\quad q_1=10,\quad q_2=100,\quad q_3=1000,\ \ldots$$

мы приходим к общепринятой десятичной системе счисления (счет единицами, затем десятками, затем сотнями, тысячами, десятками тысяч и т. д.); в ней все цифры принимают значения, не превосходящие 9.

Самой простой из всех $d$-ичных систем счисления является, очевидно, двоичная система счисления с базисом

$$q_0=1,\quad q_1=2,\quad q_2=4,\quad q_3=8,\quad q_4=16,\ \ldots$$

Эта система счисления знает всего две цифры 0 и 1. Вот запись первых 15 натуральных чисел в этой системе:

| | | |
|---|---|---|
| 1 = *1* | 6 = *110* | 11 = *1011* |
| 2 = *10* | 7 = *111* | 12 = *1100* |
| 3 = *11* | 8 = *1000* | 12 = *1101* |
| 4 = *100* | 9 = *1001* | 14 = *1110* |
| 5 = *101* | 10 = *1010* | 15 = *1111* |

При использовании этой системы счисления все расчеты становятся довольно длинными, но чрезвычайно простыми. Если бы мы всегда пользовались именно этой системой счисления, то школьникам пришлось бы запоминать лишь следующую «таблицу умножения»:

$$0\cdot 0=0,\qquad 0\cdot 1=1\cdot 0=0,\qquad 1\cdot 1=1$$

(и «таблицу сложения», сводящуюся к равенству $1+1=10$, — ведь число «10» — это обычная двойка!). Двоичная система счисления находит многочисленные применения в науке и технике; в частности, она лежит в основе устройства современных электронных счетных машин*).

*) Двоичной системе счисления и ее применениям уделено много места в рассчитанной на учащихся средней школы книжке С. В. Фомина «Система счисления» (М., «Наука», 1968), в ряде пунктов соприкасающейся с содержанием настоящей статьи.

Упражнения

4. Число $N=123\,456$, записанное в обычной (десятичной) системе счисления, перепишите:

а) в 7-ричной системе счисления;

б) в 12-ричной системе счисления (в этой системе счисления для записи чисел используются 12 цифр, например, такие: 0, 1, 2, ..., 9, $x=10$, $y=11$);

в) в двоичной системе счисления.

5. Запишите в десятичной системе счисления числа, записанные в двоичной системе:

$$P=100\,100,\quad Q=101\,010\,101.$$

6. Составьте таблицу сложения и таблицу умножения в троичной системе счисления.

## § 4. Системы счисления с другими базисами

Системы счисления с базисами, не образующими геометрической прогрессии $1, d, d^2, d^3, \ldots$, не имеют столь же широких применений. Но при решении некоторых математических задач они оказываются полезными.

Рассмотрим несколько примеров таких систем счисления.

**1° Система майя.** Выше мы уже говорили о системе счисления майя, базис которой имел вид

$$q_0=1,\quad q_1=20,\quad q_2=18q_1\ (=18\cdot 20),\quad q_3=20q_2\ (=18\cdot 20^2),\quad q_4=20q_3\ (=18\cdot 20^3),\ \ldots$$

Эта система счисления во всем подобна двадцатеричной, отличаясь от нее лишь в одном отношении: в ней вторая с конца цифра в записи $N=«a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0»$ произвольного числа (которую мы привычно располагаем горизонтально, а не сверху вниз, как майя)

$$a_1<\frac{q_2}{q_1}=\frac{18\cdot 20}{20}=18,$$

в то время как все другие цифры могут принимать 20 значений: 0, 1, 2, ..., 19.

Аналогично будет обстоять дело в системе счисления с базисом, в котором $q_{n+1}$ делится на $q_n$ без остатка для всех $n=0, 1, 2, \ldots$:

$$q_0=1,\quad q_1=d_0,\quad q_2=d_1q_1\ (=d_1d_0),\quad q_3=d_2q_2,\quad q_4=d_3q_3,\ \ldots \tag{3}$$

где $d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots$ — какие угодно целые положительные числа, большие 1, различные или одинаковые. В такой системе счисления в записи числа

$$N = «a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»$$

первая с конца цифра $a_0$ может принимать $d_0$ значений 0, 1, 2, ..., $d_0 - 1$, следующая цифра $a_1$ может принимать $d_1$ значений от 0 до $d_1 - 1$, цифра $a_2$ может принимать значения от 0 до $d_2 - 1$ и т. д.

При этом в системе счисления с базисом (3), как и в $d$-ичной системе счисления (в которую наша система обращается в случае $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = \ldots = d$), имеет смысл любая запись

$$N = «a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа такие, что $a_0 < d_0$, $a_1 < d_1$, $a_2 < d_2$ и т. д. В самом деле, легко проверить, что при обращении числа

$$N = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \ldots + a_2 q_2 + a_1 q_1 + a_0$$

в нашу систему счисления по методу «непрерывного деления» (см. выше стр. 4) получатся цифры:

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0.$$

То, что такое благополучное положение не является общим законом, мы покажем на примере одной очень простой «системы счисления».

**2°. «Четная» система счисления.** Примем за базис системы счисления все *четные* числа (и число $q_0 = 1$):

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 4, \quad q_3 = 6,$$
$$q_4 = 8, \quad q_5 = 10, \quad q_6 = 12, \ldots$$

Так как здесь

$$\frac{q_1}{q_0} = q_1 = 2$$

и

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{2(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < 2 \text{ при всех } n \geq 1,$$

то эта система счисления, подобно двоичной, знает всего две «цифры»: 0 и 1. Условимся обозначать числа, записанные в этой «четной» системе счисления красным цветом. Тогда, очевидно,

2 = 10, 3 = 11, 4 = 100, 5 = 101, 6 = 1000, 7 = 1001, 8 = 10000, 9 = 10001 и т. д.

И вообще все числа изображаются либо единицей с тем или иным количеством нулей в конце (четные числа), либо двумя единицами в начале и в конце числа, разделенными известным числом нулей (нечетные числа).

Таким образом, в «четной» системе счисления запись каждого числа имеет вид

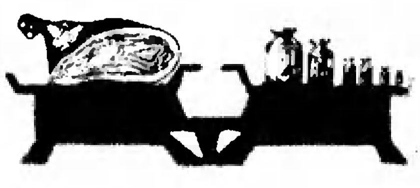
$$«a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»,$$

где каждая из цифр $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ может принимать только одно из двух значений: 0 и 1. Однако подавляющее большинство последовательностей нулей и единиц не выражают никаких чисел в «четной» системе счисления, поскольку в ней единица может стоять лишь на первом месте и — иногда — на последнем месте.

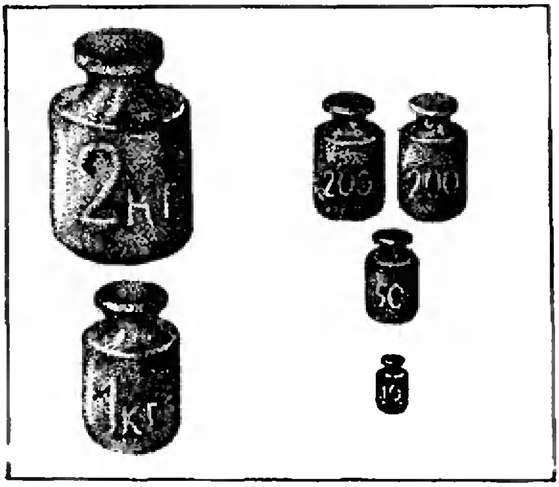
И, наконец, еще один пример.

**3°. «Система продавца».** Стандартный набор гирь для чашечных весов в магазине обычно включает гири: 10 *г*, 20 *г* (2), 50 *г*, 100 *г*, 200 *г* (2), 500 *г*, 1 *кг*, 2 *кг* (2) и 5 *кг*.

Продавец пользуется этим набором гирь, как кассир ассигнациями, имеющимися в кассе. А именно, отвешивая товар, он прежде всего кладет на весы самую тяжелую из не перевешивающих товар гирь; далее он кладет старшую из оставшихся гирь и т. д.



Так, например, взвешивая кусок мяса весом в 3 *кг* 460 *г*, он использует ряд гирь, показанных на рисунке.



Обобщая эту хорошо известную всем торговым служащим и всем хозяйкам систему «представлений чисел (весов) с помощью заданной системы гирь», мы приходим к системе счисления с базисом

1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, ... ,

в которой 3 *кг* 460 *г* запишется так 11020101000.

В этой системе счисления в записи

$$N = «a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»$$

последняя цифра $a_0$ может равняться лишь 0 или 1 (ибо $q_1 = 2$); предпоследняя цифра $a_1$ может принимать значения 0, 1 или 2 (так как $2 < q_2/q_1 < 3$); третья от конца цифра $a_2$ снова может принимать лишь значения 0 и 1 (ибо $q_3/q_2 = 2$); цифра $a_3$ также может принимать лишь значения 0 и 1, а вот цифра $a_4$ снова может принимать значения 0, 1 и 2 (ибо $2 < q_5/q_4 < 3$). И вообще в этой системе счисления все цифры

$$a_1,\ a_4,\ a_7,\ a_{10},\ \ldots,\ a_{3k+1},\ \ldots$$

могут принимать значения 0, 1 и 2, а все остальные цифры — лишь значения 0 и 1. (Поэтому продавцу в магазине достаточно иметь две двухкилограммовые гири и только по одной гире в 1 *кг* и в 5 *кг*.)

Упражнения

**7.** Запишите числа $X$, $Y$ и $Z$ в десятичной системе, если

а) в «четной» системе счисления $X = 1\,000\,000\,001$;

б) в «системе продавца» $Y = 121\,121$;

в) в «системе продавца» $Z = 20120$.

**8.** Опишите всевозможные последовательности цифр

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0,$$

которые могут быть прочитаны как запись некоторого числа в «системе продавца».

**9.** В некоторой системе счисления с базисом (1) два числа записываются так: $N = 10\,211\,004$, $M = 10\,210\,437$. Можно ли по этим данным узнать, какое число больше?

**10.** Система гирь, о которой говорили в конце статьи, удобнее при взвешивании на чашечных весах, чем десятичная система, но не является самой экономной в смысле количества гирь. Чтобы убедиться в этом, решите следующие задачи:

а) Какое наименьшее число гирь необходимо, чтобы отвесить любое целое число килограммов от 1 до 30 на чашечных весах, если гири можно класть только на *одну* чашку весов? (Вы можете подбирать такие веса гирь, какие хотите.)

б) Тот же вопрос, если разрешается класть гири на *обе* чашки весов.

в) Какое наименьшее число гирь необходимо в том и другом случае, чтобы взвесить любой груз (в целое число граммов) от 1 *г* до 1000 *г*?

**11.** Докажите, что в троичной системе счисления (т. е. в системе с базисом (2), где $q = 3$) любое число $N$ можно представить в виде $N = A - B$, где $A$, $B$ и $A + B$ записываются только нулями и единицами, причем такое представление для каждого числа единственно. Например:

$$2 = 10 - 1,\quad 21 = 101 - 10,\quad 1001 = 1001 - 0$$

(все числа записаны в троичной системе).

**12.** Докажите, что условие «$q_{n+1}$ делится на $q_n$ при всех $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$» является *необходимым* для того, чтобы в системе счисления с базисом (1) имела смысл любая запись

$$N = «a_n a_{n-1} \ldots a_0»,$$

где

$$a_0 < \frac{q_1}{q_0},\quad a_1 < \frac{q_2}{q_1},\quad a_2 < \frac{q_3}{q_2} \text{ и т. д.}$$

13. Каким условиям должны удовлетворять числа базисной последовательности $q_1$, $q_2$, $q_3$, . . . , чтобы в записи чисел встречались только две цифры: 0 и 1? Какое еще условие на эти числа $q_1$, $q_2$, . . . нужно наложить, чтобы при этом никакие две единицы не шли подряд?

14. Последовательность чисел

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 3,$$

$$q_3 = 5, \quad q_4 = 8, \quad q_5 = 13, \ \ldots,$$

$$\text{где } q_{n+1} = q_n + q_{n-1},$$

называется *последовательностью Фибоначчи*. Докажите, что «Фибоначчиева» система счисления удовлетворяет всем условиям предыдущей задачи. Найдите в этой системе сумму чисел

а) $\underbrace{100\ldots00}_{k} + \underbrace{100\ldots00}_{l}$;

б) $\underbrace{10101\ldots01}_{2m+1} + 1$;

в) $\underbrace{10101\ldots01}_{2m+1} + \underbrace{100\ldots00}_{2m+1}$.

15. Можно ли разбить все натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . . на две такие возрастающие последовательности $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, . . . и $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$, . . . , что $b_k - a_k = k$ для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$?

После некоторых размышлений вы, конечно, догадаетесь, как выбрать такие последовательности (это можно сделать единственным образом)

| $a_1$ | $b_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_2$ | $a_4$ | $b_3$ | $a_5$ | $a_6$ | $b_4$ | $a_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |

| $a_8$ | $b_5$ | $a_9$ | $b_6$ | . . . |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 14 | 15 | . . . |

Но уловить закономерность в образовании пар $(a_k, b_k)$ не так-то просто. Как узнать, например, к какой из двух последовательностей — $a_k$ или $b_k$ — относится 100, какому номеру оно соответствует, какое число будет с ним в паре (не выписывая все предыдущие $a_k$ и $b_k$)?

Оказывается, чтобы сформулировать эту закономерность, нужно записать эти последовательности не в десятичной, а в *фибоначчиевой* системе счисления. Попробуйте ее обнаружить и доказать.

# ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ НА 19 И 7

Зачеркнуть последнюю цифру и прибавить к полученному числу число, равное удвоенной вычеркнутой цифре. Если полученное число делится на 19, то и исходное число делится на 19.

Последовательно выполняя эту операцию, мы придем к двузначному числу (а если пожелаем, то и к числу, не большему, чем 19).

Пример: делится ли на 19 число 3 086 379?

$$\begin{aligned} 308\,637 + 2\cdot 9 = {} & 308\,655 \\ & 308\,75 \\ & 309\,7 \\ & 323 \\ & 38 \end{aligned}$$

Так как 38 делится на 19, то на 19 делится также и исходное число 3 086 379.

* * *

Возьмем число $\overline{abcd}$. Прочтем его так, будто бы оно записано по троичной системе, то есть $\overline{abcd} = a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d$ (не будем обращать внимание на то, что цифры $a$, $b$, $c$, $d$ могут быть равны 3, 4, 5, и т. д.). Если оно делится на 7, то и исходное число делится на 7. Верно ли это?

# Закон сохранения магнитного потока

Ю.В. Шаврин

Если опыт показывает, что при процессах определенного типа какая-то физическая величина не изменяется, можно сформулировать «закон сохранения» этой величины при процессах данного типа. Самый известный пример подобного закона — закон сохранения энергии, который выполняется при любых процессах, протекающих в системах, хорошо изолированных от влияния других тел. С помощью законов сохранения можно часто предсказать конечный результат опыта только по начальным условиям, не зная, что происходит на промежуточных стадиях. Например, если кинетическая энергия какого-нибудь тела перешла в тепло, его количество не зависит от того, каким способом это произошло.

В этой статье речь пойдет о законе сохранения магнитного потока. Этот закон, правда, выполняется только в особых условиях и не претендует на такую всеобщую роль, как закон сохранения энергии, но в своей области он тоже — закон очень полезный и, хочется добавить, красивый.

Определим сначала, что называется магнитным потоком. Представим себе, что в пространстве имеется постоянное неоднородное магнитное поле любой самой сложной формы. Его можно изобразить наглядно при помощи магнитных силовых линий, направление которых будет указывать направление поля (для этого на линиях надо поставить стрелки), а густота, то есть число линий, проходящих через перпендикулярную им площадку в 1 $см^2$, — величину напряженности магнитного поля. При помощи непрерывных непересекающихся силовых линий, которые или замкнуты, или уходят вдаль, в бесконечность, можно изобразить любое магнитное поле, какой бы сложной ни была его форма. Причем в описанной модели не будет такого места, где понадобилось бы добавить или выкинуть отрезочек линии, чтобы правильно изобразить напряженность поля. Уж так, как говорится, магнитное поле устроено. Во всяком случае, все попытки обнаружить на опыте отклонения от этого правила пока не удавались. Как мы сейчас увидим, только благодаря этому свойству магнитного поля и можно ввести понятие магнитного потока.

Если имеется какая-то замкнутая кривая в пространстве — «контур» (вообразим его сделанным из тонкой проволоки), то число магнитных силовых линий, охваченных этим контуром, будет называться магнитным потоком через этот контур. Чтобы правильно подсчитать это число, надо действовать следующим образом. Сначала — затянуть этот контур воображаемой пленкой (любой формы, только не дырявой) и отметить на ней разные ее стороны — «лицо» и «изнанку». После этого надо сосчитать все силовые линии, протыкающие пленку с изнанки на лицо, и вычесть из этого числа число силовых линий, протыкающих пленку в обратном направлении, если такие линии есть. Разность и даст нам величину магнитного потока, которая, таким образом, может быть и отрицательной. Именно потому, что силовые линии нигде не обрываются, безразлично, какой пленкой затянуть контур — обтянуть экономно или пришить к контуру целый сачок, — поток получится тот же самый (рис. 1). Поток обозначают обычно буквой $\Phi$ (может быть, потому, что она похожа на силовую линию, пронзающую контур). Если магнитное поле мы измеряем в гауссах, размерность $\Phi$ будет *гаусс · см*² (*гс · см*²).

Если магнитный поток, охваченный контуром, будет изменяться со временем на величину $\Delta\Phi$ за время $\Delta t$, а контур сделан из проволоки с электрическим сопротивлением $R$, то согласно закону электромагнитной индукции по контуру начнет циркулировать ток

$$I = -10^{-8}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot\frac{1}{R}\ \text{ампер} \qquad (1)$$

($\Phi$ выражено в *гс · см*², $t$ — в секундах, а $R$ — в омах). Этот ток в контуре идет под действием электродвижущей силы индукции

$$\varepsilon = -10^{-8}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\ \text{вольт}. \qquad (2)$$

Знак минус в этих формулах связан вот с чем: мы считаем положительным тот ток в контуре, который сам создает в нем магнитное поле с положительным потоком (такой ток обтекает контур по часовой стрелке, если смотреть «с изнанки»). Отрицательный знак, следовательно, показывает, что если поток уменьшается со временем $\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\ \text{отрицательно}\right)$, то возбуждаемый ток будет положительным и сам будет создавать положительный поток. Наоборот, если поток возрастает, ток в контуре создает поток противоположного направления (правило Ленца). Так как поток $\Phi$ складывается из потока внешнего поля и потока, создаваемого самим контуром, то индуцирование тока в контуре приводит к замедлению изменения общего потока через контур.

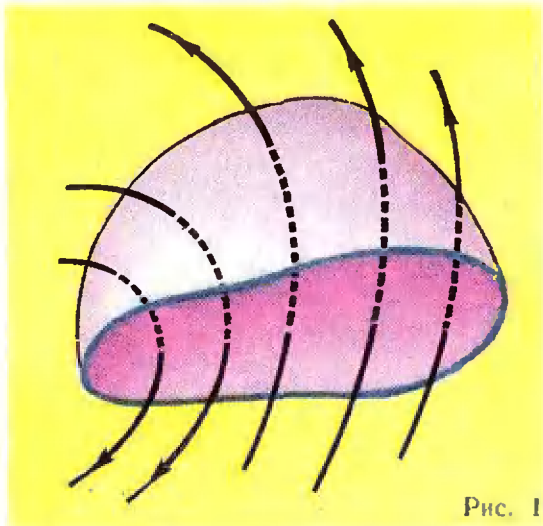


Рис. 1.

Пусть в начальный момент ток равен нулю, а поток создается каким-то внешним источником поля, например магнитом. Теперь быстро уберем магнит. Тогда в контуре одновременно с этим возникнет ток, который сам создаст магнитный поток той же величины, то есть не позволит магнитному потоку выйти из контура. Для того, чтобы в контуре с электрическим сопротивлением $R$ существовал ток, необходимо, конечно, чтобы поток изменялся. Поэтому в последующие моменты $\Phi$ будет все же постепенно уменьшаться, но тем медленнее, чем меньше $R$. Точно также, если мы захотим увеличить поток внутри контура, это можно будет сделать только постепенно.

Нужно отметить одно большое достоинство закона электромагнитной индукции: все наши рассуждения и формулы остаются справедливыми независимо от того, каким способом мы изменяем магнитный поток через контур —изменяем ли само магнитное поле или еще и двигаем, изгибаем,

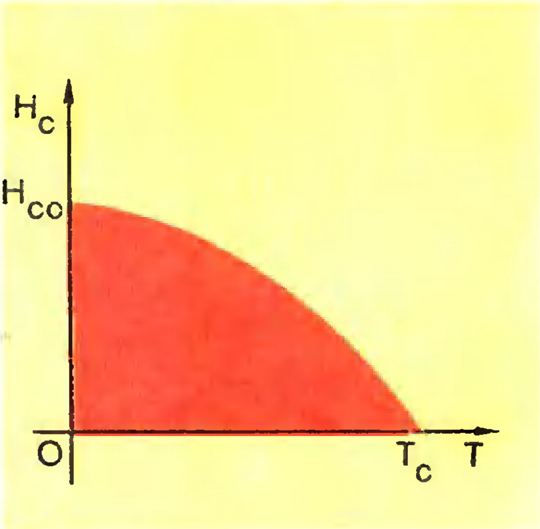



Рис. 2. Зависимость критического поля $H_c$ от температуры. $T_c$ — критическая температура. Если напряженность поля, в котором находится металл, выше $H_{co}$, он не переходит в сверхпроводящее состояние при сколь угодно низких температурах. ($H_{co}$— максимальное значение $H_c$, достигаемое при температуре 0° К.)

растягиваем контур, который в этом поле находится.

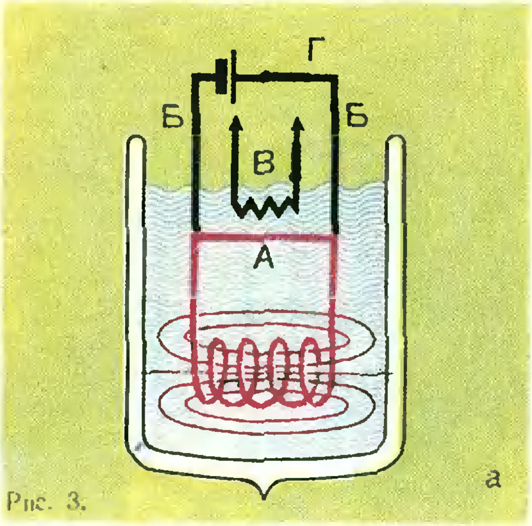
Предположим теперь, что наш контур сделан из сверхпроводника, сопротивление которого, как известно, равно нулю. О том, что сверхпроводимость наступает у многих металлов и сплавов при низких температурах, порядка нескольких градусов абсолютной шкалы, читатель, конечно, знает. Надо еще напомнить, что сверхпроводимость разрушается под действием магнитного поля с напряженностью, превышающей некоторый предел — критическое поле $H_c$, которое зависит от температуры примерно так, как показано на рисунке 2. Для свинца, скажем, при самых низких температурах $H_c = 800$ гаусс. При полях, больших $H_c$, металл вновь приобретает сопротивление.

Если в контуре с малым сопротивлением магнитный поток изменяется медленно, то естественно, что в сверхпроводящем контуре он будет вообще оставаться постоянным. Это можно увидеть непосредственно из формулы (1), только, чтобы не получить нуль в знаменателе, ее надо записать в виде $IR = -10^{-8}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. При $R=0$ $\Delta\Phi=0$. Это и есть закон сохранения магнитного потока в контуре с нулевым сопротивлением.

Именно экспериментальная проверка этого закона и показала, что сопротивление сверхпроводника практически равно нулю. Самые точные методы не могут обнаружить уменьшения магнитного поля в замкнутой сверхпроводящей катушке, даже если опыт длится несколько лет.

Рассмотрим теперь несколько примеров применения закона сохранения магнитного потока. Если изготовить из сверхпроводника трубу с площадью отверстия $S$, поместить ее при высокой температуре в продольное магнитное поле $H$, затем охладить ее ниже температуры перехода в сверхпроводящее состояние и выключить магнитное поле, то в трубе останется «замороженный» поток $\Phi = HS$. Сожмем теперь трубу или вставим в нее сверхпроводящий стержень так, чтобы свободное сечение уменьшилось до $S_1 = \frac{1}{10} S$. Тогда мы получим в трубе более сильное поле $H_1 = 10H$, поскольку из закона сохранения потока следует, что $H_1 S_1 = HS$. Нужно только, чтобы новое поле $H_1$ не было больше критического поля $H_c$ сверхпроводника при температуре опыта, иначе сверхпроводимость разрушится и поток в трубе будет уменьшаться, пока поле не достигнет значения $H_c$.

Делая этот опыт достаточно быстро, можно получить большое поле и в трубе из любого нормального металла. Если обложить трубу, в которой имеется магнитное поле, со всех сто-



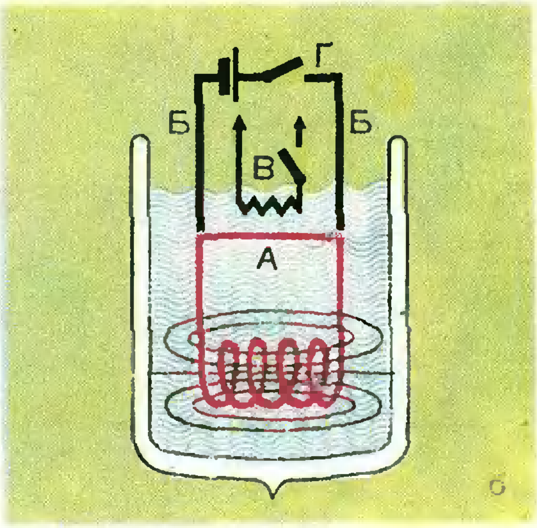




Рис. 3.

рон порохом и произвести взрыв, то можно сжать магнитный поток и получить в трубке на короткое время, порядка нескольких миллионных долей секунды, поле в десятки миллионов гаусс. Сила взрыва при этом нужна не столько для того, чтобы преодолеть сопротивление металла, сколько для того, чтобы сжимать само магнитное поле. В стенках трубы возбуждается ток, а на ток в магнитном поле действует сила. Поэтому магнитное поле оказывает давление на стенки трубы. Магнитный поток, когда его сжимают, ведет себя подобно упругому веществу. Можно подсчитать, что поле в 10 миллионов гаусс будет оказывать на стенки трубы давление, равное примерно четырем миллионам атмосфер.

При помощи известных нам сверхпроводников получить такие поля невозможно, но в катушках из сверхпроводящих сплавов уже сейчас получают поля порядка 100 000 гаусс (100 килогаусс). Ток в такую сверхпроводящую катушку можно подать самым обычным образом — через два провода, опущенные в дьюаровский сосуд, где находится при низкой температуре катушка. Можно снабдить катушку еще и сверхпроводящим ключом — кусочком сверхпроводящей проволоки $A$ (рис. 3, *а*), соединяющим клеммы, к которым подведены провода $Б$ от внешнего источника тока. Спираль $В$ нагревает проволоку $A$ до нормального состояния, в котором она обладает значительным сопротивлением (сверхпроводящие сплавы в нормальном состоянии обладают, как и другие сплавы, гораздо большим сопротивлением, чем чистые металлы). Если замкнуть ключ $Г$, то через катушку пойдет ток и магнитный поток в катушке начнет расти по закону, который легко вывести из формулы (2). Пренебрежем сопротивлением проводов $Б$ и внутренним сопротивлением источника. Поскольку в цепи без сопротивления сумма всех э. д. с. должна быть равна нулю, то э. д. с. индукции $\varepsilon$ должна быть равна минус $V$, где $V$ — электродвижущая сила источника. Из формулы (2) получаем $\Phi = 10^8 Vt$. Если катушка имеет, скажем, число витков $n = 10\,000$ со средней площадью витка $S = 20\ см^2$, то $\Phi = nSH = 2 \cdot 10^5\ H$, где $H$ — среднее поле в катушке. При $V = 1\ в$ для создания в катушке поля в 10 килогаусс понадобится 20 секунд. Если по прошествии некоторого времени выключить нагреватель и разомкнуть ключ $Г$ (рис. 3, *б*), то проволока $A$ вместе с катушкой образуют замкнутый сверхпроводящий контур, в котором поток будет оставаться постоянным. Идеальное постоянство получаемого таким способом поля оказывается чрезвычайно удобным при физических исследованиях.

◀ Рис. 3. Схема включения сверхпроводящей катушки со сверхпроводящим ключом. Часть схемы находится при низкой температуре. Схема питания нагревателя *В* на рисунке не показана.

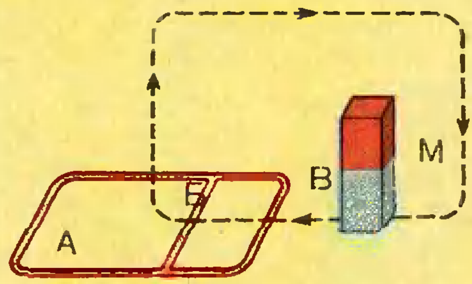



Рис. 4.

После замыкания сверхпроводящего ключа провода *Б* уже не нужны и даже вредны, поскольку по ним в дьюар проникает тепло.

Существует и другой остроумный способ «накачки» магнитного потока в сверхпроводящие катушки, позволяющий обойтись вовсе без введения проводов в дьюар. Схема устройства, основанного на этом способе, показана на рисунке 4. Катушка, которую мы для простоты заменили на рисунке плоским контуром *А*, замкнута параллельно двумя сверхпроводящими проволоками *Б* и *В*. Магнит *М* может передвигаться около контура. Путь его нижнего конца показан на рисунке 4 пунктиром. Магнит должен быть настолько сильным, чтобы его поле могло разрушать сверхпроводимость проволок *Б* и *В*.

Последовательные положения магнита при накачивании потока в контур показаны на рис. 5,*а*—5,*д*. Магнитный поток, выходящий из конца магнита, обозначен точками — следами силовых линий. В положении *а* магнит разрушил сверхпроводимость

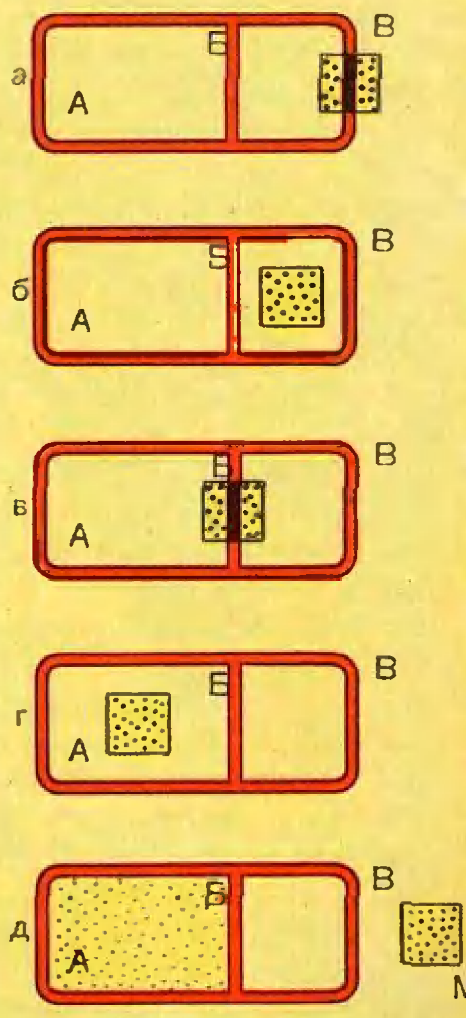
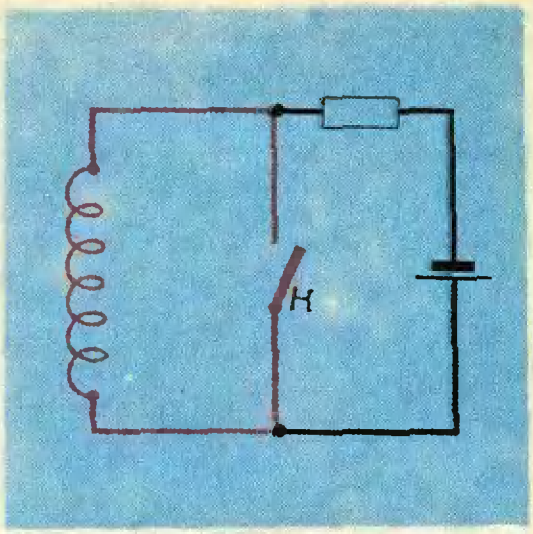



Рис. 5

проволоки $B$, и при движении магнита поток входит в контур. В момент *б* поток заключен между проволоками $Б$ и $B$. Затем поток переходит в контур $A$ (положения *в* и *г*). Когда магнит $M$ удален от контура (положение *д*), внесенный им магнитный поток перераспределяется, но остается захваченным контуром $A$. Далее цикл повторяется, и новая порция силовых линий входит в контур $A$.

Разобранные выше примеры относились к различным способам создания магнитного поля. Упомянем в заключение о приборе, предназначенном для выполнения прямо противоположной задачи — возможно более полного удаления поля из какого-либо объема. Используя явление сверхпроводимости, эту задачу можно решить простым и совершенным способом. Возьмем сплющенную сверхпроводящую оболочку и расправим ее. Тогда в образовавшейся полости магнитное поле станет равным нулю (практически, конечно, какое-то поле останется, но, во всяком случае, действуя таким способом, можно подойти к $H=0$ как угодно близко). Полученное нулевое поле будет сколь угодно долго сохраняться в замкнутой полости, несмотря на изменения поля снаружи.

В случае сверхпроводников закон сохранения магнитного потока выполняется с большой точностью, но надо иметь в виду, что его можно приближенно применять и для контуров из любых других материалов — твердых, жидких и даже газообразных (плазма), если процесс протекает достаточно быстро. Правда, для того чтобы точно определить, что значит «достаточно быстро», нам пришлось бы уже выйти за рамки этой статьи.




Задачи

1. Как зависит от времени ток, проходящий через сверхпроводящую катушку, если язычок $K$ (см. рис.) начал колебаться с некоторой частотой, замыкая и размыкая цепь? Ток в начальный момент равен $\frac{V}{R}$, где $V$ — э.д.с. источника, а $R$ — сопротивление, включенное в контур.

2. Ток в катушке нарастает прямо пропорционально времени. Как изменяется ток в другой катушке, индуктивно связанной с первой и замкнутой на некоторое сопротивление?

3. Две длинные однослойные сверхпроводящие катушки с числами витков $n_1$ и $n_2$, длинами $l_1$ и $l_2$ и сечениями $S_1$ и $S_2$ соединены параллельно при помощи сверхпроводящих проводов. Определите, как распределится между ними ток $I$, подведенный от общего источника. Катушки удалены друг от друга так, что поле одной не действует на поле другой. (Тем не менее катушки и соединяющие их провода можно рассматривать как один сверхпроводящий контур.)

4. При включении магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца радиуса $R$, по кольцу протекает заряд $Q$. Какой заряд протечет по витку, если кольцо при неизменном поле сложить «восьмеркой», состоящей из двух окружностей, причем радиус меньшей окружности равен $R/4$? Плоскость «восьмерки» также перпендикулярна магнитному полю.

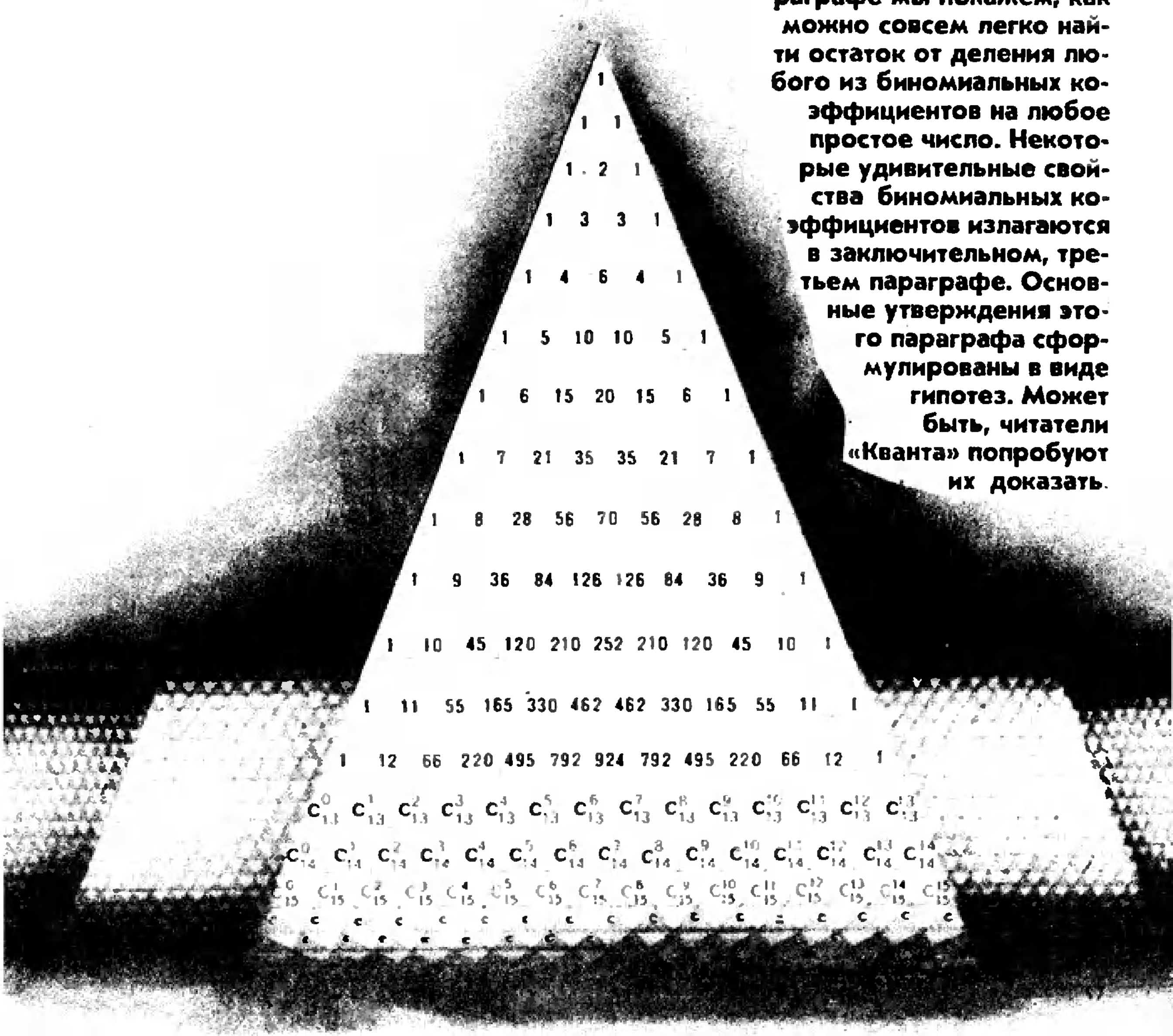
5. На оси постоянного магнита, расположенного вертикально, на некотором расстоянии от него находится легкое сверхпроводящее проволочное кольцо, плоскость которого перпендикулярна оси магнита. Кольцо отпускают, и оно начинает падать так, что остается все время горизонтальным. Как будет двигаться кольцо по вертикали?

# АРИФМЕТИКА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Д. Б. Фукс, М. Б. Фукс

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

**Эти формулы знает любой школьник. Числа 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1, а также числа, получающиеся аналогичным образом при возведении в степени 4, 5, ..., называются биномиальными коэффициентами. В этой статье рассказывается о различных свойствах биномиальных коэффициентов. В первом параграфе излагается «общая теория»: большинство из доказываемых здесь теорем входило раньше в школьную программу. Во втором параграфе мы покажем, как можно совсем легко найти остаток от деления любого из биномиальных коэффициентов на любое простое число. Некоторые удивительные свойства биномиальных коэффициентов излагаются в заключительном, третьем параграфе. Основные утверждения этого параграфа сформулированы в виде гипотез. Может быть, читатели «Кванта» попробуют их доказать.**



## § 1. Определение и простейшие свойства биномиальных коэффициентов

Если двучлен (бином) $1+x$ возвести в некоторую натуральную степень $n$, то, очевидно, получится многочлен $n$-й степени (т. е. наибольшая степень, в которой $x$ войдет в этот многочлен, будет равна $n$). Например:

$$(1+x)^0=1,$$
$$(1+x)^1=1+x,$$
$$(1+x)^2=1+2x+x^2,$$
$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3,$$
$$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4,$$
$$(1+x)^5=1+5x+10x^2+10x^3+ \\ +5x^4+x^5,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

Коэффициенты этих многочленов называются **биномиальными коэффициентами**. Для них есть специальные обозначения: коэффициент при $x^m$ в $(1+x)^n$ обозначается через $C_n^m$. Например, $C_2^1=2$, $C_4^2=6$, $C_5^3=10$. В старых учебниках по алгебре число $C_n^m$ называется «числом сочетаний из $n$ по $m$». На то есть свои причины, но мы не будем вдаваться в них: для нас это не важно. Итак,

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots \\ \ldots+C_n^nx^n. \qquad (1)$$

Отсюда легко получить, что и

$$(a+x)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}x\ldots \\ \ldots+C_n^nx^n$$

(достаточно применить формулу (1) к вычислению $(1+x/a)^n$ и умножить обе части полученного равенства на $a^n$). Последняя формула называется **биномом Ньютона**. Отсюда и название коэффициентов — биномиальные.

Ясно, что $C_n^m$ — целые неотрицательные числа и что $C_n^m=0$ при $m>n$ (многочлен $(1+x)^n$ имеет степень $n$, и $x^m$ с $m>n$ в него не входит). Легко убедиться, далее, в том, что $C_n^0=C_n^n=1$. Другие биномиальные коэффициенты $C_n^m$, где $0<m<n$, можно находить, возводя $1+x$ в различные степени. Их значения для $n\leqslant 10$ приведены в таблице.

Мы видим, что биномиальные коэффициенты — довольно-таки быстро растущие числа. Наблюдательный читатель заметит в расположении этих чисел ряд закономерностей. Как правило, такие закономерности легко выводятся из определения биномиальных коэффициентов. Мы докажем здесь только главные из них. Начнем с главного из главных — с так называемого тождества Паскаля.

| $n \backslash m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |

**Теорема 1** (тождество Паскаля).

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1} \qquad (2)$$

для любых натуральных $n$, $m$.

Доказательство. По определению, $C_n^m$ есть коэффициент при $x^m$ в многочлене $(1+x)^n$. Для того чтобы найти этот коэффициент, нужно перемножить $n$ многочленов, равных $1+x$. Перемножив $n-1$ из них, получим многочлен $1+C_{n-1}^1x+$ $+C_{n-1}^2x^2+\ldots+x^{n-1}$. Произведя последнее умножение, получим

$$(1+x)\left(1+C_{n-1}^1x+C_{n-1}^2x^2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+x^{n-1}\right)=1+C_{n-1}^1x+C_{n-1}^2x^2+\ldots$$
$$\ldots+x^{n-1}+x+C_{n-1}^1x^2+$$
$$+C_{n-1}^2x^3+\ldots+x^n=$$
$$=1+\left(C_{n-1}^1+1\right)x+$$
$$+\left(C_{n-1}^2+C_{n-1}^1\right)x^2+\ldots+x^n.$$

В полученном выражении коэффициент при $x^m$ равен $C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$. Таким образом,

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}.$$

Тождество Паскаля удобно использовать для вычисления биномиальных коэффициентов. Например, если мы захотим дополнить нашу таблицу еще одной строчкой (одиннадцатой), то нам достаточно сложить попарно числа, стоящие рядом друг с другом в предыдущей (десятой) строке:

| | |
|---|---|
| $C_{11}^0=\qquad 1$ | $C_{11}^6=C_{10}^6+C_{10}^5=462$ |
| $C_{11}^1=C_{10}^1+C_{10}^0=11$ | $C_{11}^7=C_{10}^7+C_{10}^6=330$ |
| $C_{11}^2=C_{10}^2+C_{10}^1=55$ | $C_{11}^8=C_{10}^8+C_{10}^7=165$ |
| $C_{11}^3=C_{10}^3+C_{10}^2=165$ | $C_{11}^9=C_{10}^9+C_{10}^8=55$ |
| $C_{11}^4=C_{10}^4+C_{10}^3=330$ | $C_{11}^{10}=C_{10}^{10}+\qquad=11$ |
| $C_{11}^5=C_{10}^5+C_{10}^4=462$ | $C_{11}^{11}=C_{10}^{11}+C_{10}^{10}=1$ |

Отсюда видно, что биномиальные коэффициенты удобно записывать в виде треугольной таблицы (см. заставку на стр. 17). Каждое число в этой таблице равно сумме двух чисел, стоящих над ним. Эта таблица носит название «треугольник Паскаля».

С помощью тождества Паскаля можно получить и общую формулу, выражающую $C_n^m$ через $n$ и $m$.

Теорема 2 (Формула биномиальных коэффициентов).

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m} \qquad (3)$$

для любых натуральных $n$, $m$.

Доказательство. Воспользуемся методом полной математической индукции. Если $n=1$, то формула верна:

$$C_1^1=1=\frac{1}{1};$$

$$C_1^m=0=\frac{1\cdot0\cdot\ldots\cdot(1-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m}$$
$$(m>1).$$

Предположим, что

$$C_{n-1}^m=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m}$$
$$(m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

при некотором $n$. Тогда, если $m>1$, то

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(m-1)m}+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(m-1)}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(m-1)}\times$$
$$\times\left(\frac{n-m}{m}+1\right)=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(m-1)}\cdot\frac{n}{m}=$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m}$$

Если же $m=1$, то

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}=C_{n-1}^1+C_{n-1}^0=$$
$$=\frac{n-1}{1}+1=\frac{n}{1}$$

Таким образом, формула (3) имеет место при $n=1$, и из ее справедливости для $n-1$ вытекает, что она верна для $n$. Этим формула (3) доказана при любом $n$.

Мы рекомендуем читателю, впервые познакомившемуся с формулой (3), вывести из нее уже известные нам равенства $C_n^0=C_n^n=1$ и $C_n^m=0$ при $m>n$.

Формула (3) интересна уже тем, что дробь, стоящая в ее правой части, равняется целому числу, т. е. все числа, стоящие в ее знаменателе, сократятся с числами, стоящими в числителе.

Следующая теорема будет использована в дальнейшем.

Теорема 3. Если числа $n$ и $m$ взаимно просты (т. е. наибольший общий делитель чисел $n$ и $m$ равен 1), то $C_n^m$ делится на $n$.

Доказательство:

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}=$$

$$=\frac{n}{m}\cdot\frac{(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m-1)}=\frac{n}{m}\cdot C_{n-1}^{m-1}.$$

Таким образом,

$$mC_n^m=nC_{n-1}^{m-1},$$

т. е. число $mC_n^m$ делится на $n$. Но так как $m$ и $n$ взаимно просты, т. е. $m$ не делится ни на один простой делитель числа $n$, то $C_n^m$ делится на $n$.

Например, $C_9^4=126$ делится на 9, $C_{10}^3=120$ делится на 10.

Укажем еще несколько свойств биномиальных коэффициентов:

1°. $C_n^m=C_n^{n-m}$

2°. $C_m^m+C_{m+1}^m+\ldots+C_{m+k}^m=$
$=C_{m+k+1}^{m+1}$

3°. $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$

4°. $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=C_n^1+C_n^3+$
$+C_n^5+\ldots$

Доказательства этих свойств мы оставляем читателю.

## § 2. Остатки от деления биномиальных коэффициентов на простые числа

В этом (да и в следующем) параграфе нам придется часто употреблять фразу «числа $a$ и $b$ имеют равные остатки от деления на $p$». Обычно эту фразу заменяют сокращенной записью «$a\equiv b \pmod p$». Иначе говоря, формула «$a\equiv b \pmod p$» означает, что $a-b$ делится на $p$. Например, $4\equiv 1 \pmod 3$, $999999\equiv 222222 \pmod 7$ и т. д. Формула «$a\equiv b \pmod p$» читается иногда так: «число $a$ сравнимо с числом $b$ по модулю $p$» (впрочем, мы такого выражения употреблять не будем).

Вот два очевидных свойства символа $\equiv$:

1. Если $a\equiv b \pmod p$ и $k$ — целое число, то $ka\equiv kb \pmod p$.

В самом деле, если $a-b$ делится на $p$, то и $ka-kb=k(a-b)$ делится на $p$.

2. Если $a\equiv b \pmod p$ и $b\equiv c \pmod p$, то $a\equiv c \pmod p$.

В самом деле, если $a-b$ делится на $p$ и $b-c$ делится на $p$, то и $a-c=(a-b)+(b-c)$ делится на $p$.

Напомним, что всякое натуральное число $a$ можно поделить на натуральное число $p$ «с остатком», т. е. $a$ можно единственным образом записать в виде $a=bp+c$, где $b$, $c$ — такие целые числа, что $0\leqslant c<p$.

Главной целью этого параграфа является доказательство следующего утверждения.

Теорема 4. Пусть $p$ — простое число, $m$ и $n$ — натуральные числа. Пусть, далее, $k$ и $l$ — частные от деления чисел $m$ и $n$ на $p$, а $s$ и $t$ — остатки (т. е. $m=kp+s$, $n=lp+t$, где $k$, $l$, $s$, $t$ — целые числа и $0\leqslant s<p$, $0\leqslant t<p$). Тогда

$$C_n^m\equiv C_l^k\cdot C_t^s \pmod p.$$

Как мы увидим ниже, эта теорема позволяет находить остатки от деления биномиальных коэффициентов на простые числа, почти не производя вычислений.

Доказательство теоремы 4 предваряют три леммы.

Лемма 1*).

$$a^k-b^k=(a-b)\times$$
$$\times(a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1}).$$

Доказательство очевидно: выполнив умножение в правой части и производя сокращения, получим выражение, стоящее в левой части.

Лемма 2. Если $p$ — простое число и $0<r<p$, то $C_p^r$ делится на $p$ без остатка.

Это следует из теоремы 3: раз $p$ просто и $r<p$, то числа $r$ и $p$ взаимно просты.

(Подчеркнем, что простота числа $p$ больше в доказательстве теоремы 4 нигде не используется; все же для непростого $p$ утверждение этой теоремы не имеет места.)

Лемма 3. Многочлен $(1+x)^p-(1+x^p)$ делится на $p$ (т. е. каждый коэффициент этого многочлена делится на $p$).

Доказательство. В самом деле,

$$(1+x)^p-(1+x^p)=1+C_p^1x+\cdots$$
$$\cdots+C_p^{p-1}x^{p-1}+x^p-1-x^p=$$
$$=C_p^1x+\cdots+C_p^{p-1}x^{p-1}.$$

Последнее выражение делится на $p$ в силу леммы 2.

Теперь приступаем к доказательству теоремы 4. Рассмотрим многочлен

$$P(x)=(1+x)^{lp+t}-$$
$$-(1+x)^t(1+x^p)^l.$$

Этот многочлен делится на $p$. В самом деле, на основании леммы 1,

$$P(x)=(1+x)^t\times$$
$$\times\left[(1+x)^{pl}-(1+x^p)^l\right]=$$
$$=(1+x)^t\left[(1+x)^p-(1+x)^p\right]\times$$
$$\times\left[(1+x)^{p(l-1)}+\cdots+(1+x^p)^{l-1}\right].$$

Согласно лемме 3 второй сомножитель делится на $p$; значит, и все произведение делится на $p$.

Определим в $P(x)$ коэффициент при $x^{kp+1}$. В $(1+x)^{lp+t}$, как нам известно, $x^{kp+s}$ входит с коэффициентом $C_{lp+t}^{kp+s}$. Произведение же $(1+x)^t(1+x^p)^l$ равняется

$$(1+C_t^1x+C_t^2x^2+\cdots+x^t)\times$$
$$\times(1+C_l^1x^p+C_l^2x^{2p}+\cdots+x^{lp})=$$
$$=1+C_t^1x+C_t^2x^2+\cdots+x^t+$$
$$+C_l^1x^p+C_l^1C_t^1x^{p+1}+$$
$$+C_l^1C_t^2x^{p+2}+\cdots+C_l^1x^{p+t}+$$
$$+C_l^2x^{2p}+C_l^2C_t^1x^{2p+1}+$$
$$+C_l^2C_t^2x^{2p+2}+\cdots+C_l^2x^{2p+t}+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+x^{lp}+C_t^1x^{lp+1}+C_t^2x^{lp+2}+\cdots$$
$$\cdots+x^{lp+t}.$$

Так как $t<p$, то в последней сумме каждая степень переменного $x$ присутствует не более чем один раз. Коэффициент при $x^{kp+s}$ равен, как это видно, $C_l^k\,C_t^s$ (в частности, если $s>t$, то он равен нулю).

Итак, коэффициент при $x^{kp+s}$ в $P(x)$ равен $C_{lp+t}^{kp+s}-C_l^kC_t^s$. Так как $P(x)$ делится на $p$, то и $C_{lp+t}^{kp+s}-C_l^kC_t^s$ делится на $p$, что и требовалось.

Покажем теперь, как с помощью доказанной теоремы можно находить остатки от деления биномиальных коэффициентов на простые числа. Найдем, например, чему равняется остаток от деления числа $C_{119}^{33}$ на 5. (Конечно, это можно сделать и вычислив $C_{119}^{33}$ по формуле (2), но это потребует длительной работы — ведь $C_{119}^{33}$ — 24 значное число!)

Деля числа 119 и 33 на 5, получаем, $119=23\cdot5+4$ и $33=6\cdot5+3$. В силу теоремы $C_{119}^{33}\equiv C_{23}^6\cdot C_4^3 \pmod 5$. Аналогичным образом исследуем чис-

*) Это предложение, конечно, не имеет отношения к биномиальным коэффициентам. Мы выделили его в отдельную лемму, чтобы освободить доказательство теоремы 4 от лишних выкладок.

ло $C_{23}^6$. Имеем $23=4\cdot5+3$, $6=1\cdot5+1$ и, значит, $C_{23}^6\equiv C_1^4 C_3^1 \pmod 5$. Согласно первому свойству символа $\equiv$ (см. начало этого параграфа) $C_{23}^5 C_4^3 \equiv (C_4^1 C_3^1)\, C_4^3 \pmod 5$. Согласно второму свойству символа $\equiv$, $C_{119}^{33}\equiv C_4^1 C_3^1 C_4^3 \pmod 5$. Таким образом, $C_{119}^{33}$ имеет при делении на 5 такой же остаток, что и $C_4^1 C_3^1 C_4^3=4\cdot3\cdot4=48$, т. е. число 3.

Аналогично находятся остатки от деления числа $C_{119}^{33}$ и на другие простые числа. Например:

$$119=59\cdot2+1,\ \ 33=16\cdot2+1,$$

$$C_{119}^{33}\equiv C_{59}^{16}C_1^1=C_{59}^{16} \pmod 2;$$

$$59=29\cdot2+1,\ \ 16=8\cdot2+0,$$

$$C_{59}^{16}\equiv C_{29}^8 C_1^0=C_{29}^8 \pmod 2;$$

$$29=14\cdot2+1,\ \ 8=4\cdot2+0,$$

$$C_{29}^8\equiv C_{14}^4 C_1^0=C_{14}^4 \pmod 2;$$

$$7=3\cdot2+1,\ \ 2=1\cdot2+0.$$

$$C_7^2\equiv C_3^1 C_1^0=C_3^1=3 \pmod 2.$$

Таким образом, $C_{119}^{33}$ имеет от деления на 2 такой же остаток, как 3, т. е. остаток 1, т. е. $C_{119}^{33}$ — нечетное число.

Другой пример:

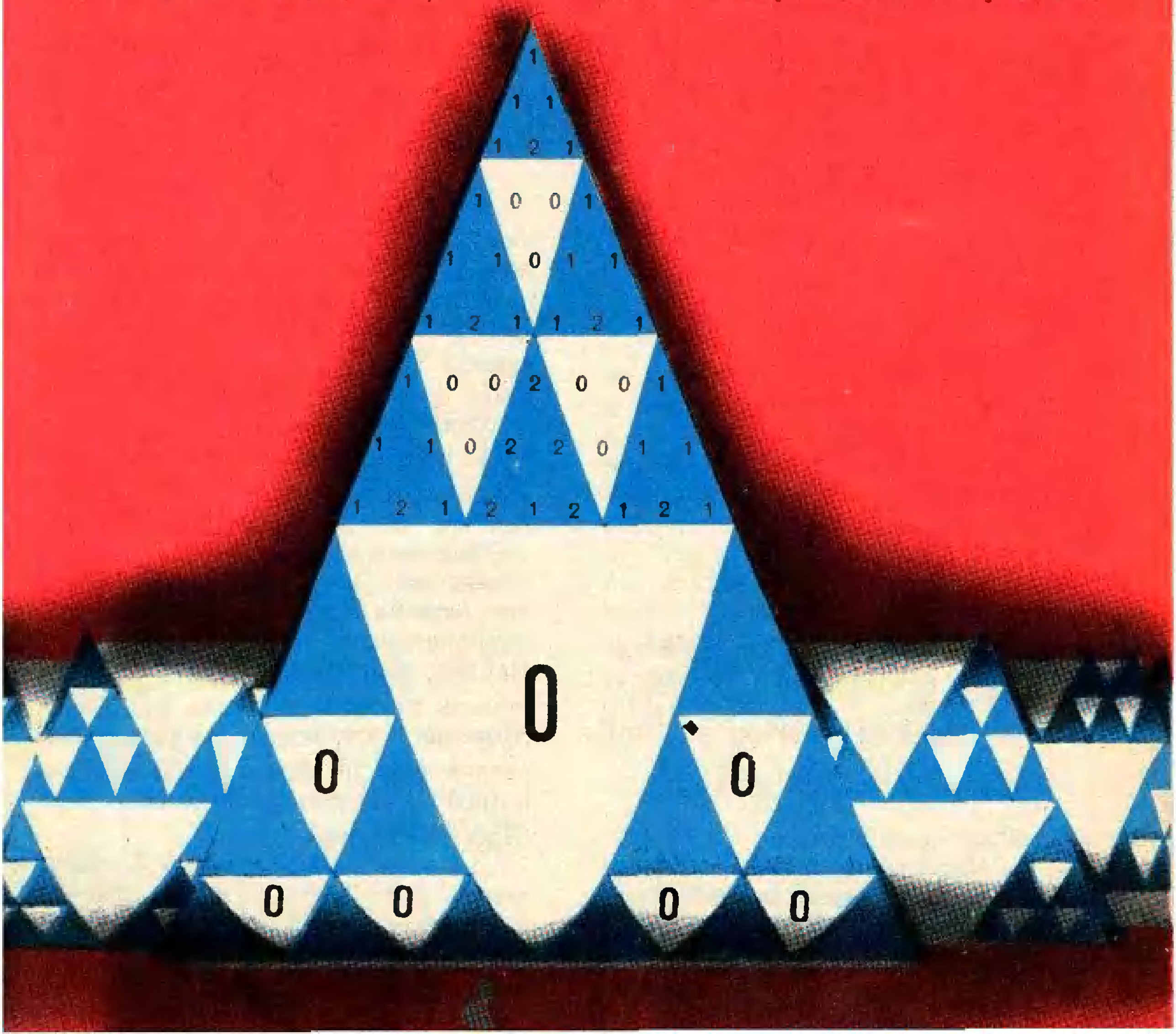
$$119=39\cdot3+2,\ \ 33=11\cdot3+0,$$

$$C_{119}^{33}\equiv C_{39}^{11}C_2^0=C_{39}^{11} \pmod 3;$$

$$39=13\cdot3+0,\ \ 11=3\cdot3+2,$$

$$C_{39}^{11}\equiv C_{13}^3 C_0^2=0 \pmod 3).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $C_0^2=0$, потому что $2>0$. Получилось,



таким образом, что $C_{119}^{33} \equiv 0 \pmod 3$, т. е. $C_{119}^{33}$ делится без остатка на 3.

Отметим, что если мы применяем нашу теорему 4 к $C_n^m$, где $n \geqslant m$, то, записывая $m = kp + s$, $n = lp + t$, мы, конечно, будем иметь $l \geqslant k$; однако невозможно предвидеть, какое из чисел $s$, $t$ окажется бо́льшим. Если будет $s > t$, то согласно нашей теореме $C_n^m \equiv C_l^k C_t^s = 0 \pmod p$, т. е. $C_n^m$ делится на $p$. Как мы видели, для определения остатка от деления числа $C_n^m$ на $p$ приходится, как правило, использовать теорему 4 несколько раз; и каждый раз может возникнуть явление, подобное описанному выше, причем, когда бы это ни случилось, это означает, что и с х о д н о е число $C_n^m$ делится на $p$. Подобным образом мы получили, что $C_{119}^{33}$ делится на 3.

Мы видим, что чем больше $n$, тем более вероятна делимость числа $C_n^m$ на $p$. Легко доказать следующее, более точное утверждение: всего чисел $C_n^m$ с $0 \leqslant n \leqslant p^r$, $0 \leqslant m \leqslant n$ имеется $\frac{p^r (p^r + 1)}{2}$, из них не делится на $p$ ровно $\frac{p^r (p+1)^r}{2^r}$ (здесь $p$ простое, $r$ натуральное; доказательство опирается только на теорему 3, мы оставляем его читателю). Подчеркнем, что при больших $r$ число $\frac{p^r (p+1)^r}{2^r}$ во много раз меньше числа $\frac{p^r (p^r + 1)}{2}$. Так, например, из чисел $C_n^m$ с $0 \leqslant n \leqslant 3^5$, $0 \leqslant m \leqslant n$ не делящихся на 3 примерно 26,2%; если $0 \leqslant n \leqslant 3^{10}$, то примерно 3,6%, а если $0 \leqslant n \leqslant 3^{15}$, то примерно 0,45%.

В заключение скажем несколько слов о весьма наглядной интерпретации теоремы 4, которую можно получить, рассматривая так называемый «треугольник Паскаля по модулю $p$». Так называется треугольная таблица, которая получится из треугольника Паскаля, если в нем заменить каждое число его остатком от деления на $p$. Мы не доказываем про этот треугольник никаких теорем, но предлагаем читателю посмотреть две картинки (на обложке и на стр. 22), на которых изображены треугольники Паскаля по модулям 2 и 3. Подумайте, как устроены эти треугольники в той части, которая не видна на рисунке. Постарайтесь сформулировать теорему 4 таким образом, чтобы она стала теоремой об устройстве треугольника Паскаля по модулю $p$.

## § 3. Немного об остатках от деления биномиальных коэффициентов на степени простых чисел

Мы не рассматриваем в сколько-нибудь общей постановке вопрос об остатках от деления биномиальных коэффициентов на составные числа. (Впрочем, читатель может подумать об этом сам; чему, например, равен остаток от деления числа $C_{119}^{33}$ на 4: единице или трем?) Мы ограничимся тем, что расскажем об одном удивительном, до конца не объясненном нами явлении.

Начнем с некоторых вычислений. Пользуясь формулой биномиальных коэффициентов (см. § 1, формула (2)), получаем

$$C_2^1 = 2,$$
$$C_4^2 = 6,$$
$$C_8^4 = 70,$$
$$C_{16}^8 = 12870,$$
$$C_{32}^{16} = 601\,080\,390.$$

(Все знают, конечно, что 1, 2, 4, 8, 16, 32,... — это последовательные степени двойки.) Сами полученные числа ничем особенным не примечательны; их последовательные разности, однако, обнаруживают поразительные свойства. Посмотрим на них:

$$6 - 2 = 4 = 2^2,$$
$$70 - 6 = 64 = 2^6,$$
$$12\,870 - 70 = 12\,800 = 2^9 \cdot 25,$$

$$601\,080\,390-12\,870=$$
$$=601\,067\,520=2^{12}\cdot 146\,745.$$

Мы видим, что эти разности делятся на высокие степени двойки — настолько большие, что вряд ли это явление случайно. Действительно удается доказать теорему, объясняющую его хотя бы частично.

Теорема 5. Если $n>1$, то число

$$\alpha_n=C_{2^n+1}^{2^n}-C_{2^n}^{2^{n-1}}$$

делится на $2^{2n+2}$.

Замечания.

1°. Предположение о том, что $n>1$, существенно, так как $\alpha_1$ равно 4 и не делится на $2^{2\cdot 1+2}=2^4=16$.

2°. Можно ожидать, что $\alpha_n$ при $n>1$ делится даже на $2^{3n}$: это верно при $n=2$, 3, 4. Но доказывать этого мы не умеем.

Доказательство. Начнем с общего замечания, что если число $r$ нечетно, то $C_{2^n}^r$ делится на $2^n$. В самом деле, поскольку $r$ нечетно, а $2^n$ не имеет простых делителей, кроме двойки, то числа $r$ и $2^n$ взаимно просты и нужное нам утверждение следует из теоремы 3.

Теперь положим

$$P(x)=(1+x)^{2^n+1}-(1-x^2)^{2^n}.$$

Многочлен $P(x)$ содержит $x^{2^n}$ с коэффициентом $C_{2^n+1}^{2^n}-C_{2^n}^{2^{n-1}}=\alpha_n$ (здесь мы пользуемся тем, что $n>1$: при возведении $(1-x^2)=1+(-x^2)$ в степень $2^n$ мы получим с коэффициентом $C_{2^n}^{2^{n-1}}$ не $x^{2^n}$, а $(-x^2)^{2^{n-1}}=(-1)^{2^{n-1}}x^{2^n}$, число же $(-1)^{2^{n-1}}$ равно 1 при $n>1$ и равно $-1$ при $n=1$).

С другой стороны,

$$P(x)=(1+x)^{2^n+1}-$$
$$-(1+x)^{2^n}(1-x)^{2^n}=$$
$$=(1+x)^{2^n}[(1+x)^{2^n}-$$
$$-(1-x)^{2^n}].$$

В то же время

$$(1+x)^{2^n}-(1-x)^{2^n}=$$
$$=(1+x)^{2^n}-(1+(-x))^{2^n}=$$
$$=1+C_{2^n}^1x+C_{2^n}^2x^2+$$
$$+C_{2^n}^3x^3+\ldots+x^{2^n}-$$
$$-1-C_{2^n}^1(-x)-C_{2^n}^2(-x)^2-$$
$$-C_{2^n}^3(-x)^3-\ldots-(-x)^{2^n}=$$

(так как $(-x)^k$ равно $x^k$ при четном $k$ и равно $-x^k$ при нечетном $k$)

$$=2\left(C_{2^n}^1x+C_{2^n}^3x^3+C_{2^n}^5x^5+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+C_{2^n}^{2^n-1}x^{2^n-1}\right).$$

Подчеркнем, что в получившийся многочлен $x$ входит только в нечетных степенях.

Мы хотим знать, с каким коэффициентом входит $x^{2^n}$ в $P(x)$, т. е. в произведение

$$(1+x)^{2^n}[(1+x)^{2^n}-(1-x)^{2^n}]=$$
$$=2\left(1+C_{2^n}^1x+C_{2^n}^2x^2+\right.$$
$$\left.+C_{2^n}^3x^3+\ldots+x^{2^n}\right)\times$$
$$\times\left(C_{2^n}^1x+C_{2^n}^3x^3+C_{2^n}^5x^5+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+C_{2^n}^{2^n-1}x^{2^n-1}\right).$$

Очевидно, $x^{2^n}$ может получиться при перемножении $x^{2^n-1}$ из первого сомножителя и $x$ из второго, при перемножении $x^{2^n-3}$ из первого сомножителя и $x^3$ из второго и т. д. Таким образом, коэффициент в $P(x)$ при $x^{2^n}$, равный, как мы знаем $\alpha_n$, равен также

$$2\left(C_{2^n}^1C_{2^n}^{2^n-1}+C_{2^n}^3C_{2^n}^{2^n-3}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+C_{2^n}^{2^n-1}C_{2^n}^1\right).$$

Как мы знаем, каждое из чисел $C_{2^n}^1$, $C_{2^n}^3$, …, $C_{2^n}^{2^n-1}$ делится на $2^n$. Поэтому каждое слагаемое в скобках делится на $2^n\cdot 2^n=2^{2n}$; кроме того, двойка стоит перед всем выражением, и к тому же каждое слагаемое в скобках встречается два раза. Таким образом, $\alpha_n$ делится на $2^{2n+2}$, что и требовалось.

Итак, странный феномен делимости чисел $\alpha_n$ на высокие степени двойки в какой-то степени объяснен. Но нечто подобное наблюдается и если заменить двойку тройкой, пятеркой, семеркой. Действительно,

$$C_9^3 - C_3^1 = 84 - 3 = 81 = 3^4;$$

$$C_{27}^9 - C_9^3 = 4\,686\,825 - 84 = \\ = 4\,686\,741 = 3^7 \cdot 2143;$$

$$C_{81}^{27} - C_{27}^9 = \\ = 2\,306\,279\,447\,501\,851\,002\,720 - \\ - 4\,686\,825 = \\ = 2\,306\,279\,447\,501\,846\,315\,895 = \\ = 3^{10} \cdot 39\,057\,044\,954\,221\,855;$$

$$C_{25}^5 - C_5^1 = 43\,130 - 5 = \\ = 43\,125 = 5^5 \cdot 69;$$

$$C_{49}^7 - C_7^1 = 85\,900\,584 - 7 = \\ = 85\,900\,577 = 7^5 \cdot 5111.$$

Короче говоря, по-видимому, верно, что при простом $p$ число

$$C_{p^{n+1}}^{p^n} - C_{p^n}^{p^{n-1}}$$

делится на высокую степень числа $p$. Но как это доказать, мы не знаем.

Кстати, если $p$ не простое, то ничего подобного не наблюдается. Например,

$$C_{16}^4 - C_4^1 = 1820 - 4 = 1816$$

не делится даже на $4^2$;

$$C_{36}^6 - C_6^1 = 1\,947\,792 - 6 = \\ = 1\,947\,786 \text{ не делится даже на } 6^2.$$

Мы полагаем, что кто-либо из читателей «Кванта» сможет разобраться в этом сложном вопросе арифметики биномиальных коэффициентов.

# СЛУЧАЙ С ДЕДЕКИНДОМ

Автор наиболее широко распространенной теории иррациональных чисел Р. Дедекинд умер, как известно, 12 февраля 1916 года в возрасте 84 лет.

Однако еще в 1904 году в «Книжке памятных дат для математиков», опубликованной в качестве приложения к каталогу издательства Teudner и предназначенной для участников третьего международного математического конгресса, состоявшегося в Гейдельберге в том же году, был отмечен под датой 4 сентября 1899 г. ...день смерти Р. Дедекинда.

Последний не замедлил написать письмо составителю упомянутой книжки примерно следующего содержания: «Глубокоуважаемый коллега! В Вашей содержательной «Книжке памятных дат» Вы любезно вспомнили и обо мне. Я очень благодарен Вам за это. Разрешаю себе, однако, обратить Ваше внимание на то, что в указании даты моей смерти по крайней мере год, должно быть, указан неверно».

**Ф29.** Найти скорость испарения с единицы поверхности воды в вакуум при температуре 20° C. (Давление насыщенных паров при этой температуре равно 17,5 мм рт. ст.) За какое время испарится в комнате вода, налитая доверху в обычное чайное блюдце? Испарение небольшого количества воды практически не меняет в комнате влажность воздуха, равную 70%.

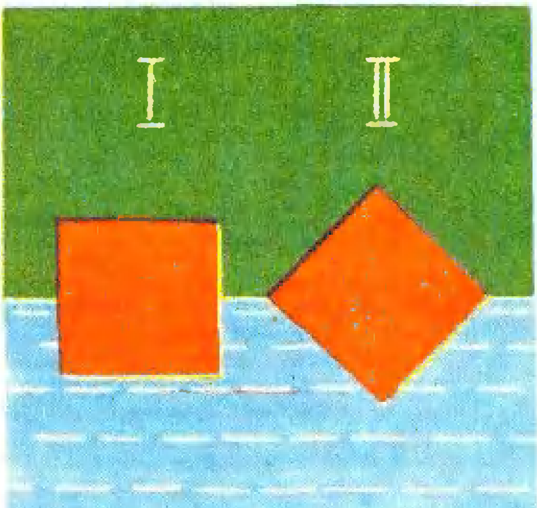


Рис. 1.

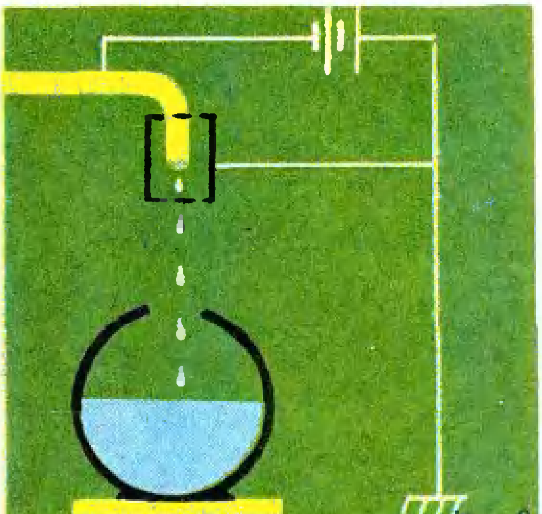


Рис. 2.

**Ф30.** В киноаппарате и кинопроекторе проходит 8 кадров в секунду. На экране движется автомобиль с колесами, реальный диаметр которых 1 *м*. Изображения колес делают 2 оборота в секунду. Какова скорость автомобиля?

*Г. Л. Коткин*

**Ф31.** Как световое давление ориентирует относительно Солнца космический корабль сферической формы, одна половина которого зеркальная, а другая — черная, полностью поглощающая излучение Солнца? Центр тяжести корабля находится в центре сферы.

*П. Л. Капица*

**Ф32.** На поверхности воды плавает деревянный брусок квадратного сечения. Какое из двух положений равновесия, показанных на рисунке 1, будет устойчивым? Плотность материала, из которого сделан брусок, равна половине плотности воды.

**Ф33.** По гладкому горизонтальному проволочному кольцу могут скользить без трения две бусинки с массами $m_1$ и $m_2$. Вначале бусинки были соединены ниткой и между ними находилась сжатая пружинка. Нитку пережигают. После того, как бусинки начинают двигаться, пружинку убирают. В каком месте кольца бусинки столкнутся в одиннадцатый раз? Бусинки сталкиваются абсолютно упруго.

**Ф34.** На рисунке 2 изображена капельная электростатическая машина (генератор Кельвина). Из трубки в полый изолированный металлический шар радиуса $R$ падают капли воды, заряженные до потенциала $\varphi$. Как зависит предельный потенциал, до которого может зарядиться шар, от высоты падения капель?

**Ф35.** Спутник летит на высоте 300 *км*. Какие неподвижные предметы можно рассмотреть на фотографии, сделанной со спутника, если время экспозиции составляет 0,2 *сек*?

**М26.** Предположим, что в каждом номере нашего журнала в задачнике «Кванта» будет пять задач по математике. Обозначим через $f(x, y)$ номер первой из задач $x$-го номера журнала за $y$-й год (например, $f(6, 1970) = 26$). Напишите общую формулу для $f(x, y)$ для всех $x$, $y$ ($1 \leqslant x \leqslant 12$, $y \geqslant 1970$).

Решите уравнение $f(x, y) = y$.

**М27.** Докажите, что если

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0, \text{ то}$$

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

**М28.** а) Из 19 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный

шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Доказать, что за 8 проверок можно выделить оба радиоактивных шара.

б) Из 11 шаров 2 радиоактивны. Доказать, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать выделение обоих радиоактивных шаров.

*XXX Московская математическая олимпиада*

**М29.** $n$ одинаковых монет лежат на столе, образуя замкнутую цепочку (см. рисунок). Сколько оборотов сделает монета $M$ такого же размера за то время, пока она один раз обкатится по внешней стороне всей цепочки, как показано на рисунке (монета $M=2$ коп.)?

Как изменится ответ, если монета $M$ будет иметь радиус, отличающийся в $k$ раз от радиуса каждой из монет в цепочке?

**М30.** Докажите, что $N$ точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше $N$ и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. (Под расстоянием между двумя кругами понимается расстояние между их ближайшими точками.)

*В. И. Арнольд*

# ММТ

Эти буквы обозначают: МОСКОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ.

До настоящего времени ММТ был единственным средним учебным заведением, готовящим специалистов по прикладной математике. С осени 1970 года начнется подготовка по этой специальности в одном из ленинградских и одном из днепропетровских техникумах Министерства приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР.

Срок обучения в ММТ: для окончивших 8 классов средней школы — 2 года 10 месяцев, а для окончивших 10 классов — 1 год 10 месяцев. Успешно окончившие техникум получают увлекательную и необходимую для народного хозяйства специальность — вычислитель-математик. Он сможет работать в вычислительных центрах, отделах и лабораториях при заводах, отраслевых объединениях вычислительной техники и конструкторских бюро.

Но самое главное — выпускники ММТ овладевают математической культурой в очень высоком смысле этого слова.

В 1970 году состоится очередной набор в ММТ. Приемные экзамены по математике (устно) и литературе (письменно) начнутся 1 августа. Если Вас интересует прикладная математика и вы хотите получить сведения о ММТ, сообщаем вам его адрес:

Москва Е—43, Нижняя Первомайская, д. 14, Московский математический техникум Министерства приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР, телефон: 165—64—72.

К сожалению, общежития в техникуме пока нет.

# Вступительные экзамены по математике в Московском институте стали и сплавов 1969 года

Требования, предъявляемые на экзаменах по математике к поступающим в Московский институт стали и сплавов, типичны для большинства технических вузов.

На факультетах МЧМиС (металлургии черных металлов и сплавов) и МЦРМиС (металлургии цветных металлов и сплавов) профилирующими дисциплинами являются математика письменная, физика и химия; на факультетах ФХ (физико-химическом) и ПМП (полупроводниковых материалов и приборов) — математика письменная и устная и физика. Конкурс на все факультеты проводится раздельно.

Отметим, что около 19% (179 человек) нового состава студентов было набрано в промышленных центрах: Бекабаде, Волгограде, Запорожье, Норильске, Орске, Череповце.

Содержание билетов для письменных и устных экзаменов строго соответствовало программам по математике для поступающих в вузы.

Разберем один из вариантов, предлагавшихся на факультетах МЧМиС и МЦРМиС.

### Вариант I.

1. Решить уравнение

$$\sec^2\frac{x}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}=16\operatorname{ctg}x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{3x^2-2x-1}{\lg(x+1)}<0.$$

3 Упростить

$$\left[4(a+1)+\left(\frac{\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[3]{a}\right)^3\right]^{1/2}$$

4. Пусть $E$ — середина стороны $AB$ трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Доказать, что площадь треугольника $ECD$ равна половине площади трапеции $ABCD$.

5. Куб с ребром $a$ вписан в правильную четырехугольную пирамиду так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах, а четыре другие вершины — на основании пирамиды. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Определить объем пирамиды.

### Решение

1. Определяем ОДЗ уравнения:

$$x\neq\pi l \quad (l=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

Приступаем к решению уравнения. Имеем

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}=16\frac{\cos x}{\sin x},$$

откуда

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}=16\frac{\cos x}{\sin x}$$

или

$$\frac{4}{\sin^2 x}=16\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Поскольку $\sin x\neq0$, получаем

$$4\sin x\cos x=1$$

или

$$\sin 2x=\frac{1}{2},$$

откуда

$$2x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

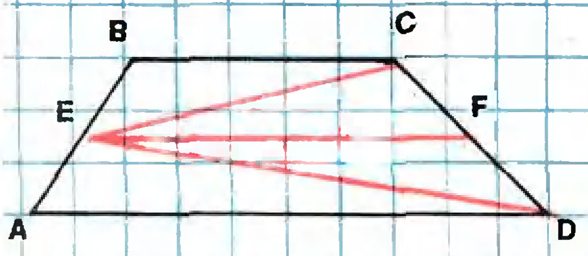


Рис. 1.

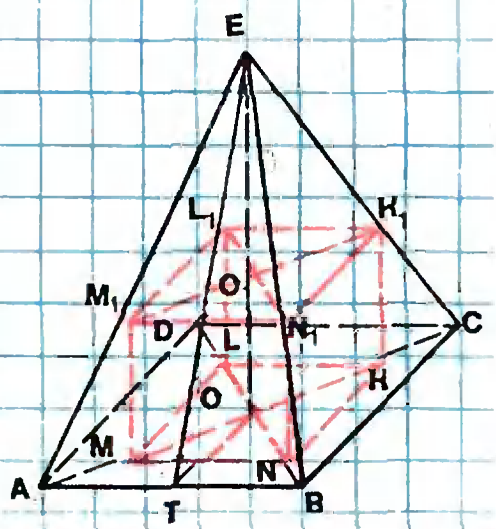


Рис. 2.

или

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \ldots).$$

Полученные решения входят в ОДЗ уравнения.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ $(n = 0,\ \pm 1,\ \ldots).$

2. Для решения неравенства

$$\frac{3x^2 - 2x - 1}{\lg(x-1)} < 0$$

заметим, что дробь будет отрицательной, если числитель и знаменатель ее имеют разные знаки. Таким образом, это неравенство равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 > 0, \\ \lg(x-1) < 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 < 0, \\ \lg(x-1) > 0. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим соответственно

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{3},\ x > 1, \\ 0 < x - 1 < 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{3} < x < 1, \\ x - 1 > 1, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{3},\ x > 1, \\ 1 < x < 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{3} < x < 1, \\ x > 2. \end{cases}$$

Вторая система решений не имеет, а решением первой служит интервал $1 < x < 2$.

Ответ: $1 < x < 2$.

3. Находим прежде всего допустимые значения $a$ и $b$:

$$a \geqslant 0,\quad b \geqslant 0,\quad a \neq -b.$$

Заметим, далее, что

$$\sqrt[6]{ab^2} + \sqrt{a} = \sqrt[6]{a}\,(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}).$$

Учитывая, что $a+b \neq 0$, и, сокращая дробь на $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, получим

$$\left[4(a+1) + \left(\frac{\sqrt[6]{ab^2} + \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[6]{a}\right)^3\right]^{1/2} =$$

$$= \left[4(a+1) + (2\sqrt[6]{a})^3\right]^{1/2} =$$

$$= 2(a + 2\sqrt{a} + 1)^{1/2} =$$

$$= 2\left[(\sqrt{a} + 1)^2\right]^{1/2} = 2(\sqrt{a} + 1).$$

4. Дано (рис. 1): $ABCD$ — трапеция, $AE = EB$.

Доказать:

$$S_{ECD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Доказательство. Проведем среднюю линию $EF$ трапеции.

Тогда $S_{ABCD} = EF \cdot H$, где $H$ — высота трапеции. С другой стороны,

$$S_{ECD} = S_{ECF} + S_{EFD} = \frac{1}{2} EF \cdot \frac{H}{2} + \frac{1}{2} EF \frac{H}{2} = \frac{1}{2} EF \cdot H.$$

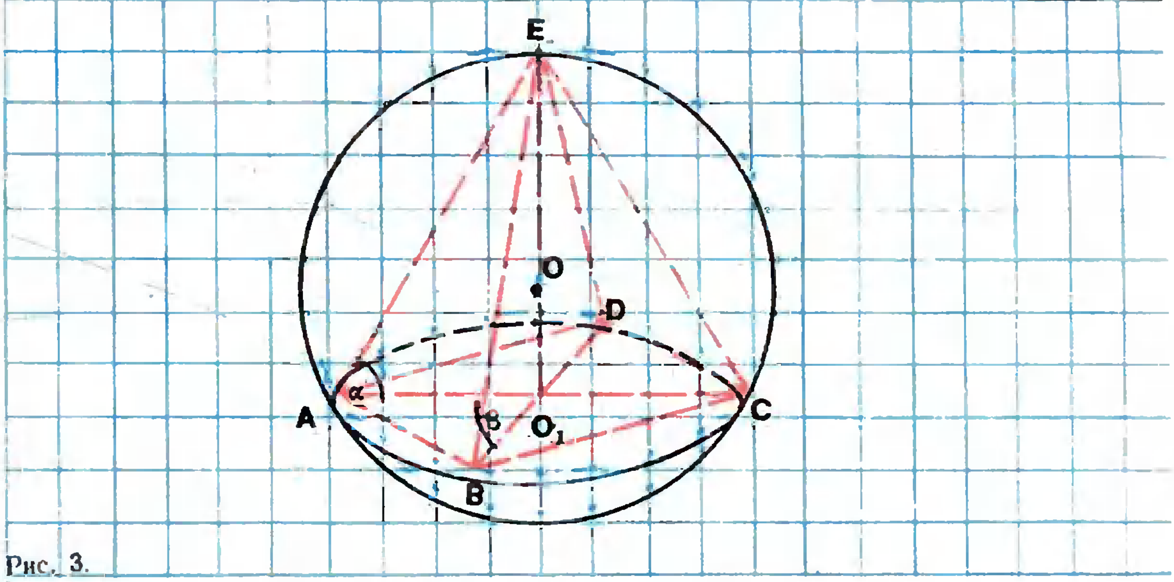



Рис. 3.

Поэтому

$$S_{ECD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

5. Прежде всего заметим, что вершины нижнего основания куба лежат на диагоналях основания пирамиды (проекциях боковых ребер) и что $\angle ETO=\alpha$ (рис. 2).

Обозначим сторону основания пирамиды через $x$. Из $\triangle EOT$ находим высоту $EO$ пирамиды:

$EO=OT\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Далее из подобия треугольников $EO_1K_1$ и $EOC$ имеем $EO_1:EO=O_1K_1:OC$ или

$$\frac{\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha-a}{\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{x\sqrt{2}}{2}},$$

откуда $$x=\frac{2a(1+\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Объем пирамиды $EABCD$ равен

$$V=\frac{1}{3}x^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{6}x^3\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{4}{3}a^3\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}{\operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$=\frac{8\sqrt{2}\,a^3\cos^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{16\sqrt{2}\,a^3\cos^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{3\sin 2\alpha\sin\alpha}.$$

Ответ: $$V=\frac{16\sqrt{2}\,a^3\cos^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{3\sin 2\alpha\sin\alpha}.$$

Разберем теперь один из вариантов, предлагавшихся на письменном экзамене на факультетах ФХ и ПМП.

### Вариант 2

1. В шар радиуса $R$ вписана четырехугольная пирамида, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Определить объем пирамиды, если в ее основании лежит прямоугольник с углом $\beta$ между диагоналями.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin 10x+\sin 2x=\cos 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{3x+4}x^2<1.$$

4. Упростить выражение

$$(a+x^{1/2})^{-1/2}+(a-x^{1/2})^{-1/2},$$

где $x=4(a-1)$, причем $1<a<2$.

### Решение

1. Плоскость основания пирамиды пересекает шар по кругу (рис. 3), описанному около основания $ABCD$. Высота пирамиды пройдет через центр $O$ шара и через центр $O_1$ этого круга, так как все ребра наклонены к основанию под равными углами. Плоскость, проходящая через диагональ основания $AC$ и вершину $E$, пересечет шар по большому кругу, описанному около диагонального сечения пирамиды $AEC$. Из $\triangle AEC$, где $\angle AEC=$

$=180^\circ-2\alpha$, по теореме синусов находим, что $AC=2R\sin(180^\circ-2\alpha)=2R\sin 2\alpha$. Поэтому

$$AO_1=\frac{1}{2}AC=R\sin 2\alpha.$$

Из $\triangle AEO_1$ определим высоту пирамиды:

$$EO_1=H=AO_1\cdot\operatorname{tg}\alpha=R\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Площадь основания пирамиды равна

$$S_{ABCD}=2(S_{AO_1B}+S_{BO_1C})=$$
$$=2\left[\frac{1}{2}AO_1^2\sin\beta+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}AO_1^2\sin(180^\circ-\beta)\right]=$$
$$=2R^2\sin^2 2\alpha\sin\beta.$$

Объем пирамиды $V$ будет равен

$$V=\frac{1}{3}2R^2\sin^2 2\alpha\sin\beta\cdot R\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=$$
$$=\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\alpha\operatorname{tg}\alpha\sin\beta.$$

Ответ:

$$V=\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\alpha\operatorname{tg}\alpha\sin\beta.$$

2. Заметив, что

$$\cos 2x-\sin 2x=$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\sin 2x=$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right),$$

перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{2}\sin 10x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$

или

$$\sin 10x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

откуда

$$\sin\left(6x-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{8}\right)=0.$$

Приравнивая нулю каждый из сомножителей, получим

$$x_1=\frac{\pi}{48}(8n+1)\quad(n=0,\ \pm1,\ \ldots),$$

$$x_2=\frac{\pi}{32}(8k+1)\quad(k=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

3. Рассмотрим два случая: $3x+4>1$ и $0<3x+4<1$.

В первом случае получим

$$\begin{cases}3x+4>1,\\ x^2<3x+4,\\ x^2>0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x>-1,\\ -1<x<4,\\ x\neq 0,\end{cases}$$

откуда находим

$$-1<x<0,\quad 0<x<4.$$

Во втором случае имеем

$$\begin{cases}0<3x+4<1,\\ x^2>3x+4,\\ x^2>0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}-\frac{4}{3}<x<-1,\\ x<-1,\quad x>4,\\ x\neq 0,\end{cases}$$

откуда получим

$$-\frac{4}{3}<x<-1.$$

Ответ: $-\frac{4}{3}<x<-1$;

$$-1<x<0;\quad 0<x<4.$$

При решении этой задачи многие не учитывали условия $x\neq 0$ и потому вместо двух последних интервалов получали $-1<x<4$.

4. Имеем

$$(a+x^{1/2})^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{x}}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a-1}+1},$$

$$(a-x^{1/2})^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{x}}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{|\sqrt{a-1}-1|}=\frac{1}{1-\sqrt{a-1}},$$

поскольку $1<a<2$, т. е. $\sqrt{a-1}<1$.

Окончательно получаем

$$(a+x^{1/2})^{-1/2}+(a-x^{1/2})^{-1/2}=$$
$$=\frac{1}{1+\sqrt{a-1}}+\frac{1}{1-\sqrt{a-1}}=\frac{2}{2-a}.$$

При решении этой задачи многие забывали про условие $1<a<2$ и потому ошибались при извлечении корня.

Письменные экзамены показали следующие наиболее слабые места у поступающих:

1) Все еще много ошибок допускается при упрощении алгебраических выражений: абитуриенты плохо владеют действиями со степенями, ошибаются там, где надо пользоваться определением арифметического корня (см. задачу 4 из разобранного выше варианта 2).

2) У многих поступающих нет свободного владения тригонометрическими формулами, в результате чего возникали ошибки при решении тригонометрической задачи или же избирался далеко не самый короткий путь решения такой задачи.

3) При решении неравенств допускались ошибки, связанные с незнанием как свойств неравенств, так и свойств функций. Очень часто, например, абитуриенты не учитывали ОДЗ входящих в неравенство функций (см. задачу 2 из варианта 1, задачу 3 из варианта 2).

4) При решении стереометрических задач часто камнем преткновения служило незнание основных понятий стереометрии. Например, часто поступавшие неправильно находили линейный угол двугранного угла, особенно в тех случаях, когда надо было строить линейный угол двугранного угла между смежными боковыми гранями пирамиды. Многие ошибочно считали, что линейным углом будет в этом случае угол при вершине лежащего в основании пирамиды многоугольника.

Попробуйте теперь сами решить некоторые задачи из других вариантов вступительных экзаменов.

Задачи, предлагавшиеся на факультетах МЧМиС и МЦРМиС.

1. Преобразовать в произведение

$$\sin 5\alpha\cdot\sin 4\alpha+\sin 4\alpha\cdot\sin 3\alpha-$$
$$-\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha.$$

2. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$; $0<\alpha<45^\circ$.

3. Доказать тождество

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right).$$

4. Вычислить $18\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{x}{2}$, если $\cos x=\frac{2}{3}$.

5. Доказать равенство

$$\frac{\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}-2\sin 70^\circ=1.$$

6. Решить неравенство

$$3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}<29.$$

7. Решить уравнение

$$\log_2(4^{x-2}+1)-x+4=\log_2 17.$$

8. Решить неравенство

$$\log_3\frac{5x-3}{2-x}>0.$$

9. Решить неравенство

$$\log_x\frac{15}{1-2x}<-2.$$

10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{3}{y}=7{,}5,\\ \frac{7}{x}+\frac{y}{6}=1{,}5.\end{cases}$$

11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=2{,}5,\\ x+y=9.\end{cases}$$

12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2\log_a x+\log_a y=3,\\ \log_b x-\log_b y=1.\end{cases}$$

13. Найти все действительные значения $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ y=ax\end{cases}$$

имеет действительные решения.

14. Найти все значения $a$, при которых трехчлен

$$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$$

будет положителен при всех действительных значениях $x$.

15. Найти, при каких значениях $a$ решение системы

$$\begin{cases} x+y=3, \\ ax+4y=6 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенствам $x>1$, $y>0$.

16. При каких значениях $a$ уравнения $3x^2-x-a=0$ и $4x^2+8x+a=0$ оба имеют действительные корни?

17. В каком промежутке должно изменяться число $m$, чтобы оба корня уравнения $x^2-2mx+m^2-1=0$ были заключены между $-2$ и $4$?

18. Доказать, что если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол на три равные части, то треугольник — прямоугольный.

19. Доказать, что в правильном пятиугольнике один из отрезков пересекающихся диагоналей равен стороне пятиугольника.

20. Треугольник $ABC$ вращается вокруг биссектрисы $AD$. Доказать, что площади поверхностей, описанных при этом сторонами $AB$ и $AC$, относятся, как объемы, полученные вращением частей $ABD$ и $ACD$.

21. Доказать, что если в усеченный конус можно вписать шар, то объем конуса равен произведению его полной поверхности на $1/6$ высоты.

22. Доказать, что объем конуса равен произведению его полной поверхности на $^1/_3$ радиуса вписанного шара.

**Задачи, предлагавшиеся на факультетах ФХ и ПМП.**

23. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, у которого одна из сторон основания равна $b$. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол $\alpha$, а с боковой гранью, проходящей через данную сторону основания, угол $\beta$. Определить боковую поверхность цилиндра.

24. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно $l$, а двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен $\beta$.

25. Вычислить без помощи таблиц

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ.$$

26. Решить уравнение

$$\sec^2 x = \frac{2-\cos x-\sin x}{1-\sin x}.$$

27. Решить неравенство

$$|x|^{x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}} < 1.$$

28. Решить неравенство

$$\frac{|x-2|-|x+2|}{x-1} < 0.$$

29. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{0,2}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} < 1.$$

30. Решить неравенство

$$\lg\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right| < 0.$$

31. Решить неравенство

$$\log_x 2 \log_{2x} 2 \log_2 (4x) > 1.$$

32. Доказать, что при $n^2<a<2n^2 (n>0)$

$$\left(\sqrt{a+2n\sqrt{a-n^2}}+\sqrt{a-2n\sqrt{a-n^2}}\right): \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}}+\dots \right.$$

$$\left. \dots+\frac{1}{\sqrt{a+n-1}+\sqrt{a+n}}\right)=$$

$$=10^{\lg 2+\lg\,(\sqrt{a}+\sqrt{a+n})}.$$

33. Решить уравнение

$$\sqrt{a^2+bx}+\sqrt{a^2-bx}=\sqrt{2abx}$$

при $a>0$, $b>0$.

34. Упростив, решить уравнение

$$\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+2)(2x-\sqrt{x^2-1})}{(x+1)^{3/2}+(x-1)(x-1)^{1/2}}=$$

$$=\sqrt{x^2-1}\left(\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}-\log_a b\right).$$

35. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3|x|-5y=3, \\ 2x+|y|=11. \end{cases}$$

36. Доказать, что

$$\left[\frac{1}{2^{1/4}+2^{1/8}+1}+\frac{1}{2^{1/4}-2^{1/8}+1}-\right.$$

$$\left.-2\cdot\frac{2^{1/4}-1}{2^{1/2}+2^{1/4}+1}\right]\cdot\frac{2^{1/2}+2^{1/4}+1}{2}=$$

$$=1+\lg 4+\sqrt{4\lg^2 2+\lg 5-\lg 8}.$$

37. При каких значениях параметра $t$ уравнение $1+\sqrt{x+2\lg t}=\sqrt{x-1}$ имеет действительные решения?

*В. В. Гольдберг*

# Вступительные экзамены по математике в Московском авиационном институте (МАИ) 1969 г.

В большинстве ВТУЗ ов страны проводятся два вступительных экзамена по математике: один устный, а второй письменный. В МАИ проводятся также два экзамена, но оба они письменные.

Первая письменная работа содержит один теоретический вопрос по геометрии или тригонометрии, две задачи по геометрии и два примера, в том числе одно уравнение, по тригонометрии.

Вторая письменная работа содержит один теоретический вопрос и четыре примера или задачи из алгебры.

Приведем теперь типовые варианты по геометрии, тригонометрии и алгебре.

### Вариант 1

1. Доказать теорему об измерении угла, вершина которого находится внутри и вне круга.

2. Доказать тождество

$$\left(\operatorname{tg} 2\alpha+\frac{1}{\cos 2\alpha}\right)(\cos\alpha-\sin\alpha)=$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

3. В трапеции $ABCD$ сумма углов при основании $AD$ равна 90°. Нижнее и верхнее основания равны соответственно 7 и 3. Определить отрезок, соединяющий середины оснований.

4. Две взаимно перпендикулярные образующие прямого кругового конуса делят окружность основания в отношении 1:2. Найти боковую поверхность конуса, если высота его равна $h$.

5. Решить уравнение

$$4\sin^2 x+\sec(3\pi+x)=1.$$

### Вариант 2

1. Вывод формулы суммы $n$ членов геометрической прогрессии.

2. Найти комплексное число $z=x+iy$, если

$$|z+3i|^2-z=3+2i.$$

3. Решить уравнение

$$\log_3(\log_2 x-1)^2=\sqrt{5}^{\log_5 4}.$$

4. Двое вышли одновременно из $M$ и $N$ навстречу друг другу. Они встретились в 50 *м* от $N$, а затем, дойдя до $N$ и $M$, пошли обратно и вновь встретились в 25 *м* от $M$. Найти расстояние $MN$, если известно, что они двигались равномерно и непрерывно.

5. При каких действительных значениях параметра $m$ корни уравнения

$$\sqrt{x^2-x-2m^2+2m+2}=\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

действительны и имеют разные знаки?

### Решения

### Вариант 1

2. Преобразуем левую часть следующим образом:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}(\cos\alpha-\sin\alpha)=$$
$$=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$$
$$=\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)}=$$
$$=\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

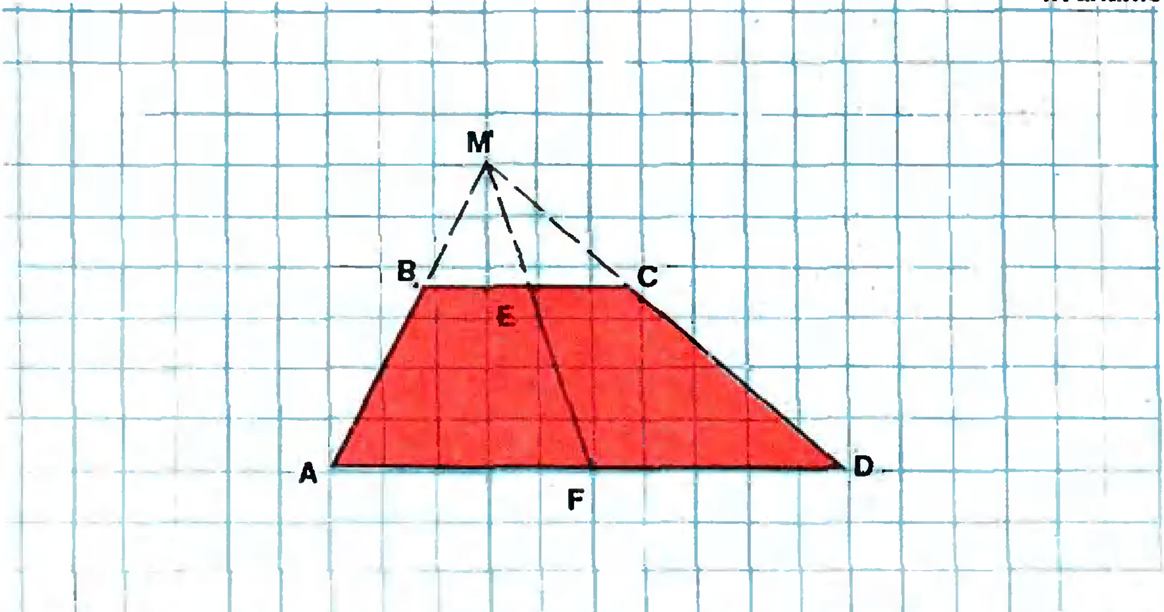



Рис. 1.

3. Изобразим трапецию с искомым отрезком $EF$ и продолжим ее боковые стороны до взаимного пересечения в точке $M$ (рис. 1). Продолжение прямой $EF$ также пройдет через точку $M$, так как $MF$ будет медианой полученного $\triangle AMD$. По условию $\angle AMD = 180° - \angle A - \angle D = 90°$. Из свойства медианы прямоугольного треугольника следует, что

$$MF = \frac{1}{2} AD \quad \text{и} \quad ME = \frac{1}{2} BC.$$

Многие не использовали этого свойства медианы и испытывали затруднения в решении задачи. Между тем нетрудно сообразить, что прямой угол опирается на диаметр окружности, описанной около треугольника. Центр такой окружности лежит на середине гипотенузы, т. е. в основании медианы. Следовательно, $MF$ и $AF$ равны как радиусы. Отсюда вытекает указанное выше свойство. Далее легко найти искомый отрезок:

$$EF = MF - ME = \frac{1}{2}(AD - BC) =$$

$$= \frac{1}{2}(7 - 3) = 2.$$

4. В обозначениях рисунка ~~2~~ 3 боковая поверхность конуса

$$S_{бок} = \pi \cdot AO \cdot AS.$$

Обозначим $AS = BS = x$. Тогда, так как $\angle ASB$ прямой, $AB = x\sqrt{2}$, а $AC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

По условию $\angle AOB = 120°$, следовательно, $\angle AOC = 60°$ и

$$AO = \frac{AC}{\sin 60°} = \frac{x\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = x\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Высота конуса

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}} = h.$$

Отсюда найдем $x = h\sqrt{3}$, а $AO = h\sqrt{2}$.

Боковая поверхность конуса будет

$$S_{бок} = \pi h\sqrt{2} \cdot h\sqrt{3} = \pi h^2\sqrt{6}.$$

5. Имеем $4\sin^2 x - \frac{1}{\cos x} = 1$, где $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Приводя к общему знаменателю, получим

$$4\sin^2 x \cdot \cos x - 1 = \cos x,$$

$$4(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x = 1 + \cos x$$

или

$$(1 + \cos x)(4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0$$

и далее приравниваем каждый из сомножителей нулю. Здесь многие не выносили общий множитель $(1 + \cos x)$ за скобку, а раскрывали скобки в предпоследнем выражении и приходили к кубическому уравнению

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 1 = 0,$$

с решением которого не справлялись.

Однако простые кубичные уравнения, такие, которые решаются разложением на множители, могут встречаться на вступительных экзаменах, и их необходимо уметь решать.

В данном случае выразим 1 как разность чисел 4 и 3 и представим уравнение в виде

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 4 - 3 = 0$$

Группируя, запишем

$$4(\cos^3 x + 1) - 3(\cos x + 1) = 0,$$

а затем

$$(\cos x + 1)[4(\cos^2 x - \cos x + 1) - 3] = 0$$

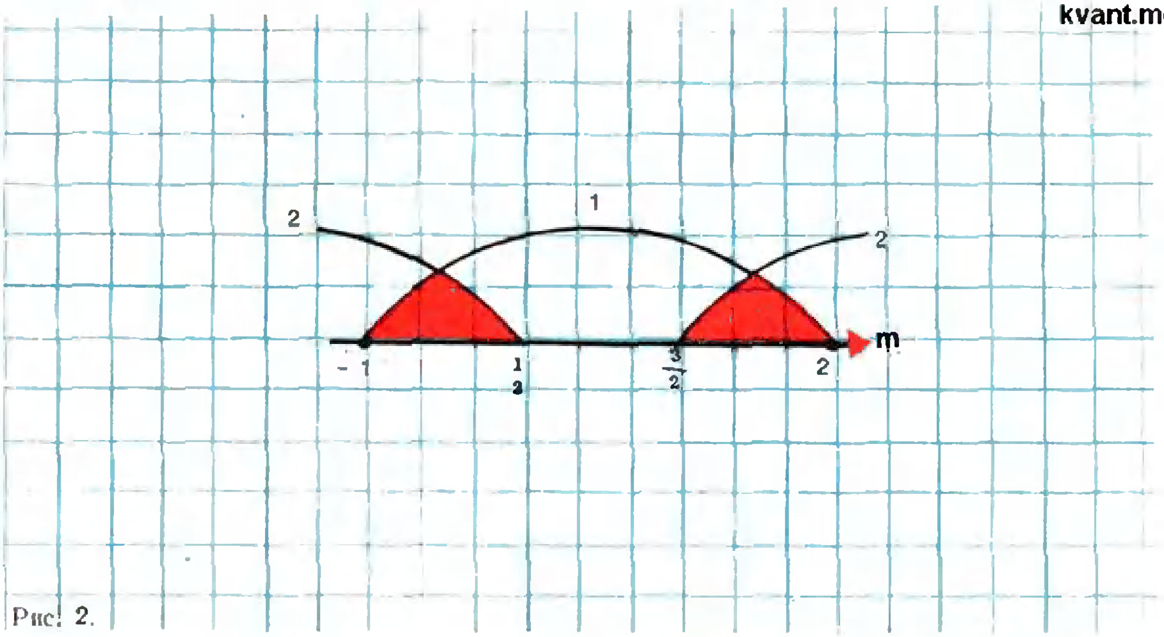



Рис. 2.

или

$$(\cos x+1)(4\cos^2 x-4\cos x+1)=0.$$

Получили то же, что и в первом варианте решения. Далее,

1) $\cos x+1=0$; $\cos x=-1$ и

$$x_1=\pi(2k+1);$$

2) $(2\cos x-1)^2=0$; $\cos x=\frac{1}{2}$

и $x_{2,3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

Вариант 2

2. В этом примере основная трудность заключается в правильной записи модуля комплексного числа. Здесь комплексное число $z=x+iy$, а комплексное число $z+3i=x+iy+3i=x+(y+3)i$. Модуль последнего $|z+3i|=\sqrt{x^2+(y+3)^2}$, а его квадрат $|z+3i|^2=x^2+(y+3)^2$. Таким образом, имеем

$$x^2+(y+3)^2-x-iy=3+2i.$$

Два комплексных числа равны, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Следовательно,

$$\begin{cases} x^2+(y+3)^2-x=3,\\ y=-2.\end{cases}$$

Решая систему, найдем $x_1=-1$ и $x_2=2$. Отсюда получим два комплексных числа: $z_1=-1-2i$ и $z_2=2-2i$.

3. Используя основное логарифмическое тождество, получим

$$\log_3(\log_2 x-1)^2=2.$$

Далее многие допускали ошибку, а именно логарифмировали степень, вынося показатель степени скобки 2 за знак логарифма, и сокращали уравнение на двойку. Такое преобразование в данном случае приводит к потере корня, так как после логарифмирования выражение в скобках может быть лишь положительным, в то время как в исходном уравнении оно могло быть и положительным и отрицательным.

Правильное решение:

$$(\log_2 x-1)^2=9 \text{ или } |\log_2 x-1|=3.$$

Отсюда $\log_2 x-1=\pm 3$, что приводит к двум решениям:

1) $\log_2 x=4$ и $x_1=16$;

2) $\log_2 x=-2$ и $x_2=\frac{1}{4}$.

Оба корня положительны и удовлетворяют ОДЗ неизвестного $x>0$.

4. Обозначим расстояние между $M$ и $N$ через $x$. Тогда путем первого от $M$ до первой встречи будет $(x-50)$, а путь его от первой до второй встречи равен $50+(x-25)=x+25$. Путь второго от $N$ до первой встречи 50, а от первой до второй встречи $(x-50)+25=x-25$. Так как они двигались равномерно, то отношение путей первого и второго до первой встречи и от первой встречи до второй постоянно. Отсюда получим уравнение

$$\frac{x-50}{50}=\frac{x+25}{x-25}$$

или $(x-50)(x-25)=50(x+25)$.

5. Прежде всего следует заметить, что левая часть заданного уравнения, как арифметический корень четной степени, неотрицательна. Следовательно, и правая часть его должна быть неотрицательна, т. е. $x+1\geqslant 0$; отсюда находим ОДЗ неизвестного: $x\geqslant -1$.

Возводя обе части иррационального уравнения в квадрат, получим в области допустимых значений $x\geqslant -1$ равносильное ему уравнение

$$2(x^2-x-2m^2+2m+2)=x^2+2x+1$$

или

$$x^2-4x-4m^2+4m+3=0,$$

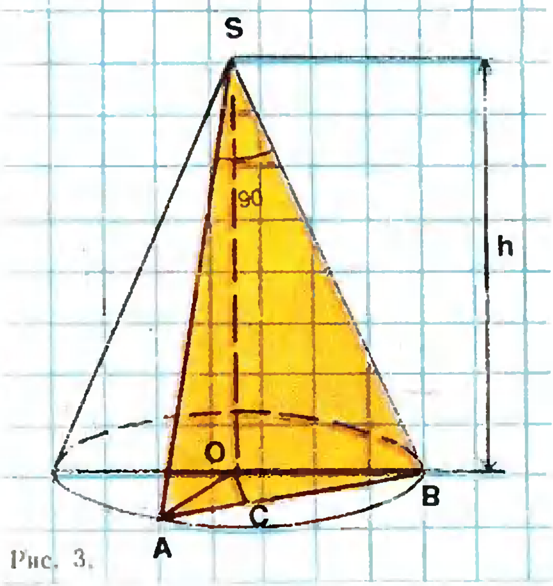


Рис. 3.

корни которого

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 4m^2 - 4m - 3} = \\ = 2 \pm (2m - 1),$$

т. е. $x_1 = 1 + 2m$ и $x_2 = 3 - 2m$.

Полученные корни будут действительны при всех действительных $m$. Для найденных значений корней необходимо потребовать выполнения ОДЗ, т. е.

$$\begin{cases} 1 + 2m \geqslant -1, \\ 3 - 2m \geqslant -1; \end{cases} \quad \begin{cases} m \geqslant -1, \\ m \leqslant 2; \end{cases}$$

отсюда

$$-1 \leqslant m \leqslant 2. \qquad (1)$$

Кроме того, по условию задачи корни должны иметь разные знаки. Это будет в том случае, если $x_1 \cdot x_2 < 0$ или $(1+2m)(3-2m) < 0$. Последнее неравенство выполняется при

$$m < -\frac{1}{2} \text{ и } m > \frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Сопоставляя полученные результаты (1) и (2) на числовой оси (рис. 3), получим, что все поставленные условия задачи выполняются при следующих значениях $m$:

$$-1 \leqslant m < -\frac{1}{2} \text{ и } \frac{3}{2} < m \leqslant 2.$$

Остается отметить, что поскольку $x_1$ и $x_2$ являются решениями заданного уравнения, то при $x=x_1$ и $x=x_2$ его подкоренное выражение обязательно будет полным квадратом, а следовательно, неотрицательно. Это можно проверить и непосредственной подстановкой.

Типичная ошибка, которую допускали 70% абитуриентов в этой задаче, заключалась в том, что не учитывалась область допустимых значений $x \geqslant -1$.

*В. А. Нагаев*

*П. Н. Торжков*

## МЕШОК КАРТОШКИ

**В мешке находится картошка весом 100 кг при влажности 99%. Картошка высохла, влажность уменьшилась до 98%.**

**Каков стал ее новый вес?**

## ТОЛЬКО ЛИ 2?

Всем хорошо известны следующие равенства:

$2 \times 2 = 4$, $2+2=4$; $0+0=$ $=0 \times 0 = 0$.

Подумайте над такими вопросами:

1. Существуют ли другие *целые* $a$ и $b$, что

$$a+b=ab.$$

2. Существуют ли другие *рациональные* числа?

3. Пусть к тому же

$$a+b=ab=p,$$

где $p$ — целое число, $p \neq 0$, $p \neq 4$. Возможно ли это:

а) для действительных $a$, $b$;

б) для рациональных $a$, $b$.

* * *

1. Натуральное число не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. Найти остаток от деления 4-й степени этого числа на 480.

2. Двое купили одинаковые блокноты: первый 5 шт., второй 31 шт. Сдача первому с пяти рублей содержала столько рублей и копеек, сколько копеек и рублей соответственно содержала сдача второго с 25 руб. Сколько стоит блокнот?

Ю. В. Зайчиков

# ГРАФИКИ ДВИЖЕНИЯ

Механическое движение очень удобно изображать на графиках. Простота и наглядность их позволяют сразу оценивать характер движения на различных его этапах и решать некоторые задачи, не прибегая к расчетам.

На вступительных экзаменах в вузы графики часто используют при дополнительных вопросах. Поэтому нужно хорошо понимать графики и уметь их анализировать.

## График скорости

Рассмотрим сначала прямолинейное движение. Прямую, по которой движется тело, примем за координатную ось $x$. На ней выберем начальную точку O и будем определять положение тела координатой $x$, отсчитываемой от этой нулевой точки в одну сторону со знаком плюс, а в другую — со знаком минус. Если направление движения совпадает с положительным направлением оси $x$, скорость тела считают положительной, в противном случае — отрицательной (рис. 1).

Проведем оси координат и будем откладывать по одной из них время $t$, а по второй — скорость $V$ (рис. 2). Любая линия в этих координатах выразит графически зависимость скорости от времени. Что можно узнать из такого графика?

Прямая $I$, параллельная оси $t$,

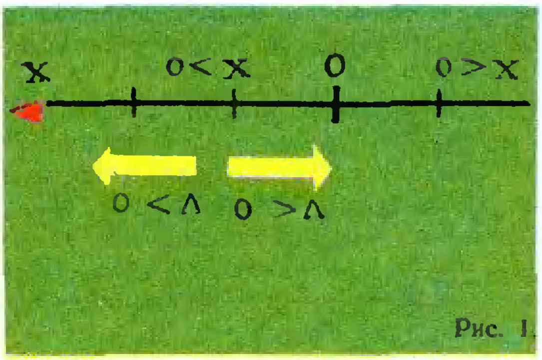


Рис. 1

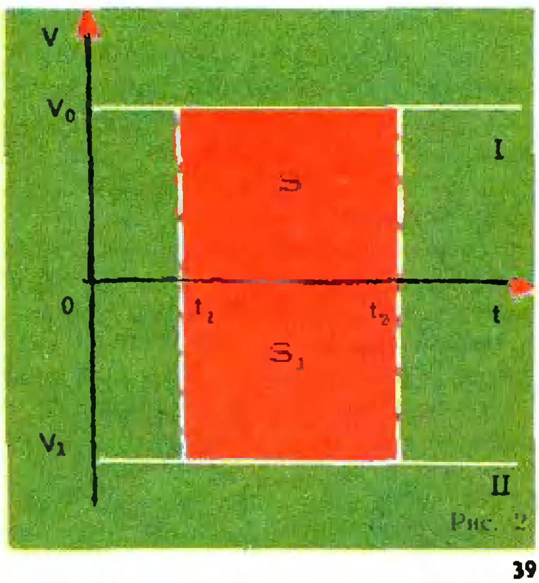
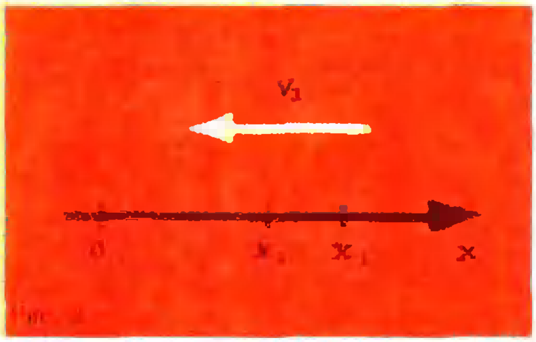



Рис. 2



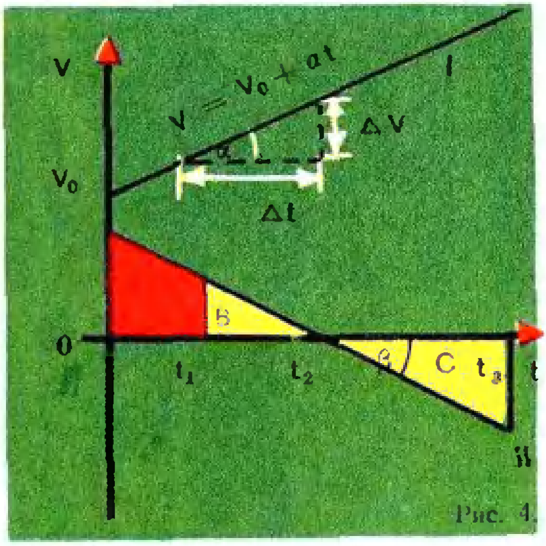



Рис. 4.

характеризует движение с постоянной скоростью $V_0$. То, что скорость положительна, означает, что направление движения совпадает с положительным направлением оси $x$. Путь, пройденный телом с момента $t_1$ до момента $t_2$, равен по величине площади верхнего прямоугольника: $S=V_0(t_2-t_1)$.

Прямая $II$ на рисунке 2 тоже соответствует равномерному движению, но только в противоположном направлении (скорость отрицательна). Путь, пройденный этим телом за время $(t_2-t_1)$,— положительное число, равное по величине площади нижнего прямоугольника: $S_1=V_1(t_2-t_1)$.

По графику можно узнать и изменение координаты тела $\Delta x=x_2-x_1=V(t_2-t_1)$. В обоих случаях оно по абсолютной величине равно площади фигуры под графиком ($S$ или $S_1$), но в первом случае оно положительно, а во втором — отрицательно, так как во втором случае $x_2<x_1$ и $V_1<0$ (рис. 3).

При равноускоренном движении график скорости тоже прямая, только идущая под некоторым углом к оси времени $t$: $V=V_0+at$ (рис. 4). Здесь $V_0$ — скорость тела при $t=0$. Тангенс угла наклона прямой $I$ к оси $t$ равен по величине ускорению тела:

$$a=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\operatorname{tg}\alpha.$$

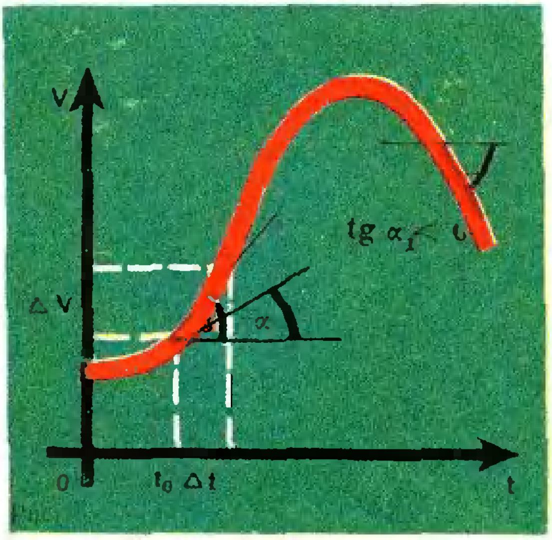
Чем круче поднимается прямая, тем больше ускорение.

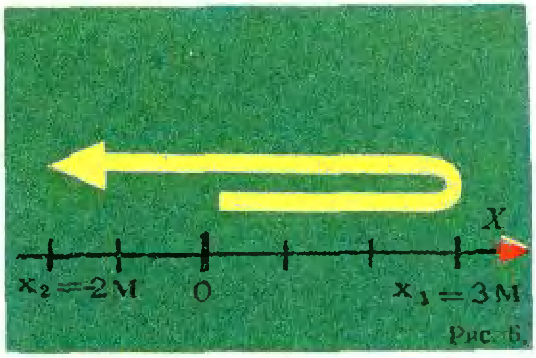
Движение, которому соответствует прямая $II$ на рисунке 4,—движение с отрицательным ускорением. Можно ли сказать, что это «замедленное» движение? Можно, но только до момента $t_2$, пока скорость и ускорение имели разные знаки, то есть были направлены в противоположные стороны. При $t>t_2$ абсолютная величина скорости растет, так как направления скорости и ускорения совпадают: они оба отрицательны.

Подобным движением является, например, полет брошенного вверх камня: скорость его вначале уменьшается, затем достигает нуля и, наконец, изменив направление, возрастает. Ускорение при этом постоянно и равно минус $g$ (сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Путь, пройденный телом с момента $t=0$ до момента $t=t_1$, равен по величине площади трапеции $A$, а путь, пройденный с момента $t_1$ до момента $t_3$,— сумме площадей треугольников $B$ и $C$. Изменение координаты тела за время $t_3-t_1$ равно разности площадей этих треугольников, так как тело вначале двигалось в одну сторону ($V>0$), а затем— в другую ($V<0$).

Если ускорение тела не постоянно, то график скорости изображает-




ся кривой (рис. 5). Ускорение в любой момент времени $t_0$ можно найти, определив тангенс угла наклона касательной к графику в точке с абсциссой $t_0$.

В этом легко убедиться, заменив отрезок кривой маленьким прямолинейным отрезком. tg β равен среднему ускорению $a_{ср}=\frac{\Delta V}{\Delta t}$ за время $\Delta t$. При $\Delta t \to 0$ отрезок стремится к касательной к графику скорости, а среднее ускорение за время $\Delta t$ — к мгновенному ускорению в момент $t=$ $=t_0$, то есть к величине $a=\operatorname{tg}\alpha$.

По кривой на рисунке 5 легко определить, что ускорение вначале увеличивается (тангенс угла наклона касательных растет), затем уменьшается, проходит через нуль (горизонтальный участок) и становится отрицательным.

Мы видим, таким образом, что график скорости позволяет понять общий характер движения, найти пройденный путь и изменение координаты, узнать скорость и ускорение для любого момента времени, а также оценить изменение этих величин в прошлом и будущем.

График скорости можно строить и для криволинейного движения тела. Если нам известна траектория, то, выбрав одно из направлений по траектории за положительное, можно строить график скорости так же, как мы это делали в случае прямолинейного движения. Знак скорости будет означать направление движения, а величина ординаты — абсолютную величину скорости.

Так, например, при движении тела по окружности с постоянной скоростью $V_0$ графиком скорости будет прямая *I* на рисунке 2. Площадь фигуры под графиком скорости и в этом случае численно равна пути, пройденному телом. Прямая *II* будет характеризовать подобное же движение, но в обратном направлении ($V_1<0$).

### График пути и график координаты

Нужно хорошо понимать разницу между этими графиками. Путь, пройденный телом,— это положительная величина, увеличивающаяся вне зависимости от направления движения тела, поэтому график пути не может идти вниз и располагаться ниже оси $t$.

Координата характеризует положение тела относительно выбранной начальной точки. В процессе движения она может увеличиваться, уменьшаться, проходить через нуль, быть положительной и отрицательной.

Именно так, например, изменяется координата при движении тела вдоль оси $x$ сначала в одну сторону, а затем в другую (рис. 6). Мы видим, что итоговое изменение координаты

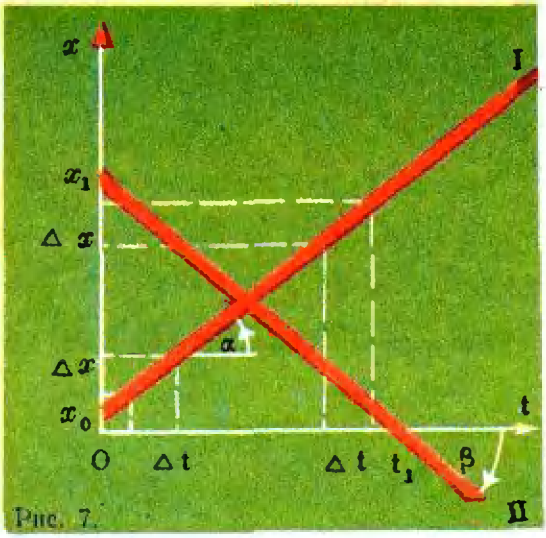



Рис. 7.

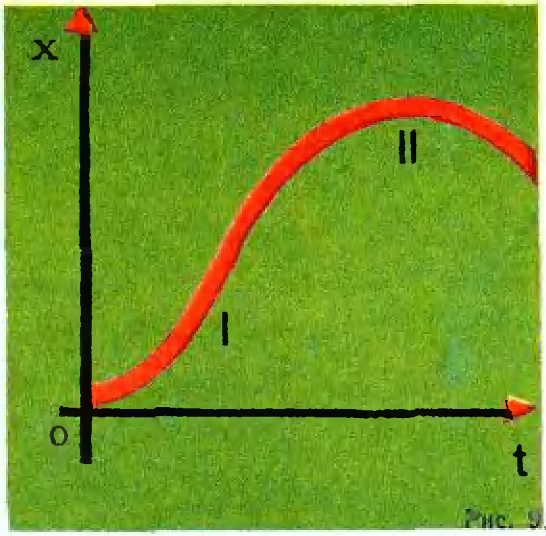



Рис. 9.

за все время движения равно — 2 *м*, а пройденный за это же время путь равен 8 *м*. На участках, где движение не меняет направления (например, $0 - x_1$ или $x_1 - x_2$), изменение координаты равно по абсолютной величине пройденному пути.

Рассмотрим график координаты более подробно.

Прямая *I* (рис. 7), идущая под углом $\alpha$ к оси $t$, соответствует равномерному движению, так как за равные промежутки времени $\Delta t$ тело проходит одинаковые отрезки координат $\Delta x$. Тангенс угла наклона этой прямой, как легко видеть из рисунка,

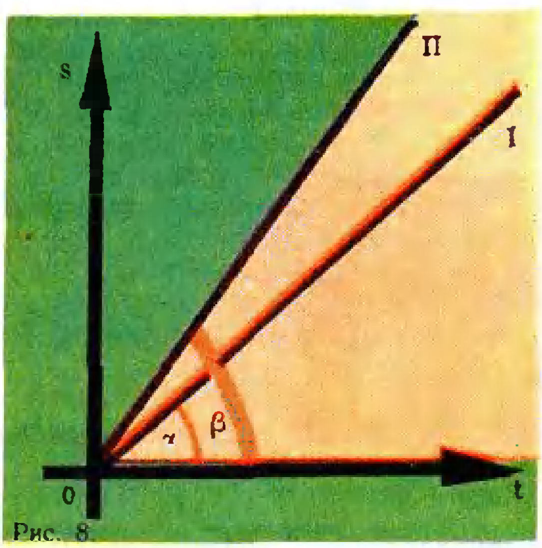



Рис. 8.

численно равен скорости движения:

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \operatorname{tg}\alpha$$

(в нашем примере движение не меняет направления, поэтому изменение координаты $\Delta x$ за время $\Delta t$ в точности равно пройденному за это же время пути $\Delta S$).

Чем круче поднимается прямая, тем больше тангенс угла наклона и, следовательно, больше скорость. Точка $x_0$ на прямой *I* — начальная координата тела. Она характеризует положение тела в начальный момент времени (при $t=0$). С течением времени тело удаляется от начала отсчета в положительном направлении ($x>0$ и возрастает).

Прямая *II* на рисунке 7 тоже соответствует равномерному движению, но с отрицательной скоростью ($\operatorname{tg}\beta<0$). Тело находилось при $t=0$ на расстоянии $x_1$ от начала отсчета. Оно движется навстречу первому телу, достигает начала отсчета при $t=t_1$ и продолжает движение в отрицательном направлении.

Графики пути для обоих случаев приведены на рисунке 8. Это прямые, идущие под углами $\alpha$ и $\beta$ к оси абсцисс.

Ускоренное движение изображается на графике кривой линией (рис. 9). Если ускорение постоянно, кривая — парабола. Тангенс угла наклона касательной к графи-

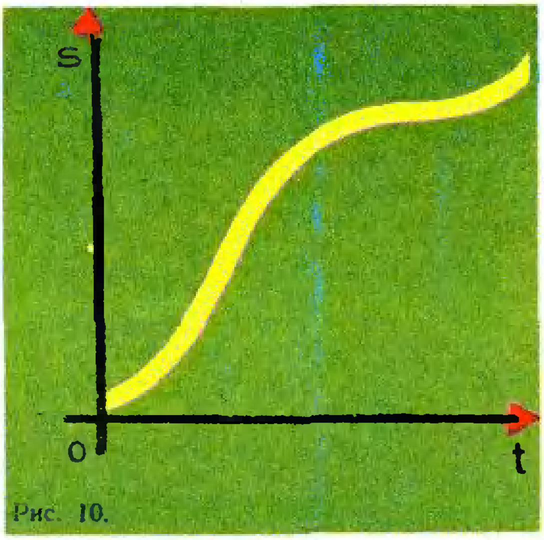


Рис. 10.

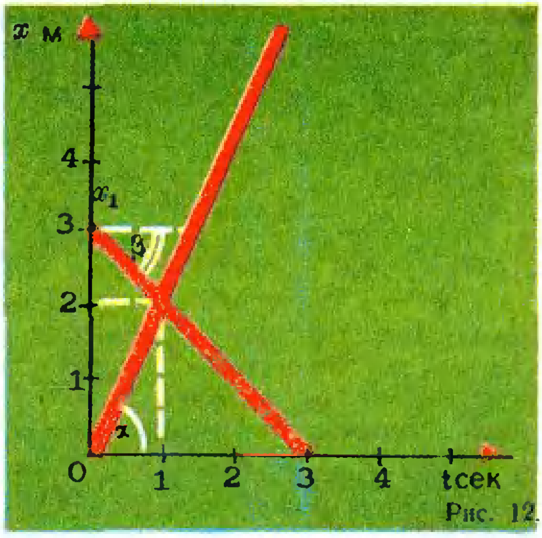


Рис. 12.

ку координаты равен по величине численному значению скорости тела. Поэтому, если кривая изогнута так, как на участке *I* (рис. 9), тангенс угла наклона возрастает, а, следовательно, скорость увеличивается; если же кривая изогнута так, как на участке *II*, скорость уменьшается. Соответствующий график пути приведен на рисунке 10. Пока координата тела возрастает, график пути совпадает с графиком координаты; когда координата убывает, путь возрастает так, что увеличение пути равно уменьшению координаты.

Следует помнить, что скорость тела не может меняться скачком и поэтому графики координаты и пути не могут иметь изломов. График координаты, например, не может быть таким, как на рисунке 11. В момент времени $t=t_1$ скорость при таком движении должна была бы скачком измениться от $V_1=\operatorname{tg}\alpha$ до $V_2=\operatorname{tg}\beta$, что невозможно.

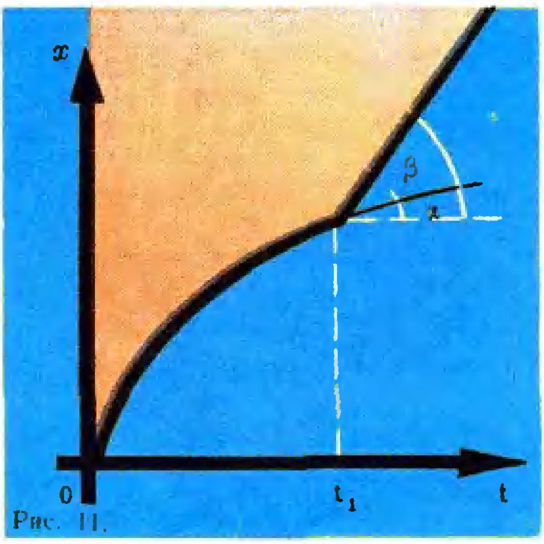


Рис. 11.

Решим две задачи.

1. Два тела, находясь на расстоянии $S_0=3$ *м*, начинают двигаться навстречу друг другу со скоростями $V_1=2$ *м/сек* и $V_2=1$ *м/сек*. Где и когда они встретятся?

Задача легко решается графически (рис. 12). Будем считать, что первое тело движется от начала координат в положительном направлении, то есть на графике вверх, а второе — из точки $x_1=S_0$ в отрицательном направлении, то есть на графике вниз (координата уменьшается). Оба движения изобразятся наклонными прямыми линиями, идущими навстречу друг другу и пересекающимися в точке, соответствующей координате и времени встречи.

Наклон прямых определится из условий: $\operatorname{tg}\alpha_1=V_1=2$, $\operatorname{tg}\beta=V_2=-1$. Из графика видно, что встреча произойдет в точке с координатами $t=1$ *сек* и $x=2$ *м*.

На экзаменах часто просят прокомментировать движение, изображенное на каком-либо графике, и показать (нарисовать), как выглядит график того же движения в других координатах.

2. По графику координаты (рис. 13) начертить примерный график скорости.

Графики удобно строить один под другим, чтобы можно было сопоставлять их для одинаковых моментов времени. Анализ графика следует начинать с наиболее простых участков (в нашей задаче это *1* и *5*), где скорость одинакова и постоянна по величине (тангенсы углов наклона равны и не изменяются). Изобразив эти участки на графике скорости прямыми горизонтальными линиями, можно переходить к анализу криволинейной части графика координаты.

Нетрудно увидеть, что на участке *2* скорость возрастает (тангенс угла наклона касательной увеличивается), на участке *3* — уменьшается, в точке *A* скорость достигает исходного значения (касательная параллельна начальной прямой), а в точке *B* равна нулю (тангенс равен нулю). На участке *4* тело движется в обратном направлении, и скорость поэтому отрицательна. В точке *C* скорость снова переходит через нуль и затем возрастает до прежней величины.

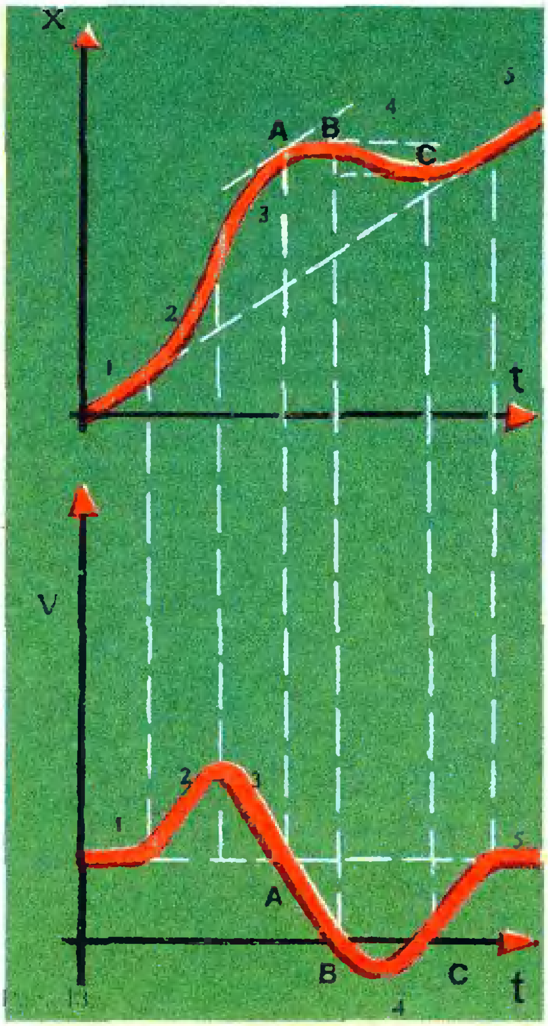


Рис. 13

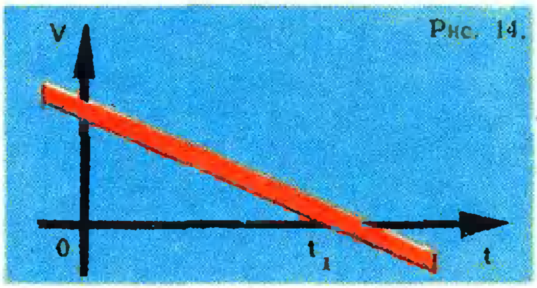


Рис. 14.

Для успешного построения графиков необходима, разумеется, тренировка. Ее легко осуществить, рисуя произвольные графики в одной системе координат и строя соответствующие им графики в другой.

Попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

1. По графику скорости (рис. 14) найдите графики координаты и ускорения. Что означают отрицательные значения *t*?

2. По графикам координаты (рис. 15) начертите графики скорости.

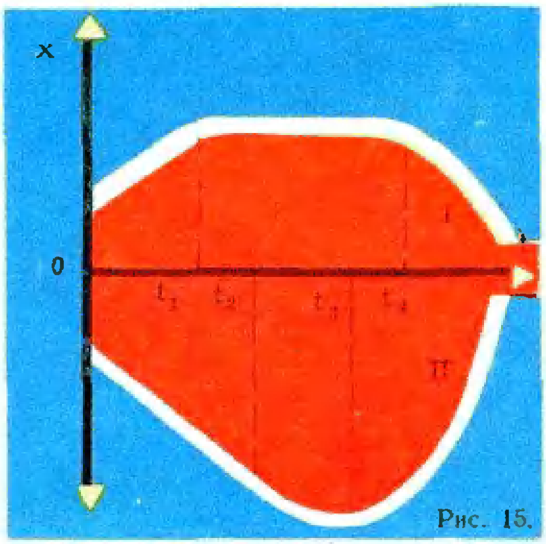


Рис. 15.

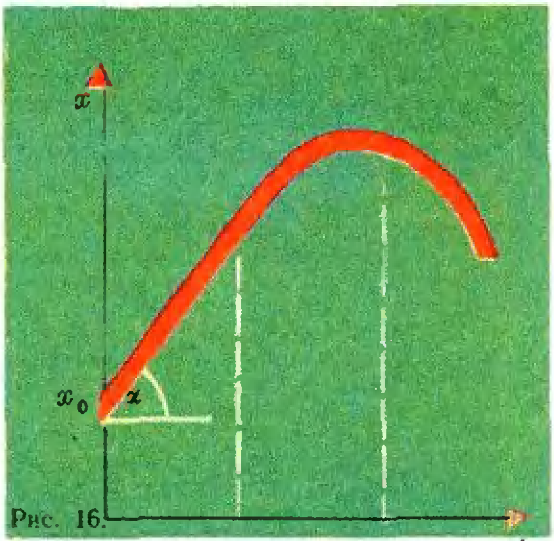



Рис. 16.

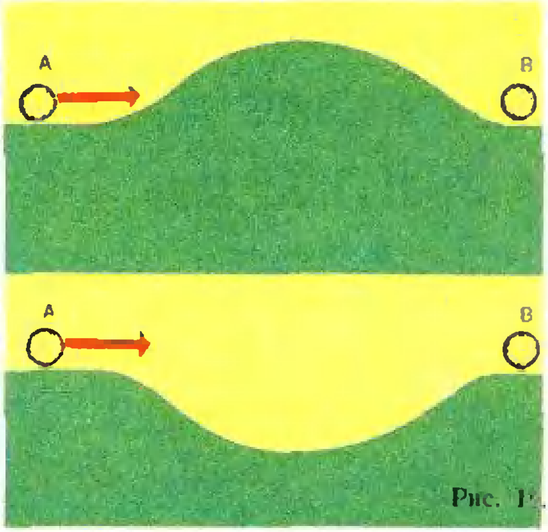



Рис. 18.

3. Что за движение изображено на рисунке 16 и как оно будет выглядеть на графике скорости? После момента $t = t_1$ кривая графика — парабола.

4. По графику ускорения (рис. 17) начертите графики скорости, координаты и пути.

5. В первые две секунды тело прошло 4 метра, затем, уменьшив скорость, оно двигалось в течение 4 секунд в том же направлении и, наконец, вернулось обратно с первоначальной скоростью. На протяжении каждого из трех этапов скорость считать постоянной. Второе тело начало движение секундой раньше из той же точки и двигалось с постоянной скоростью $V = \frac{3}{4}$ *м/сек*. По графику пути определите: 1) скорость первого тела на втором этапе; 2) время и места встреч обоих тел; 3) путь, пройденный первым телом за все время движения.

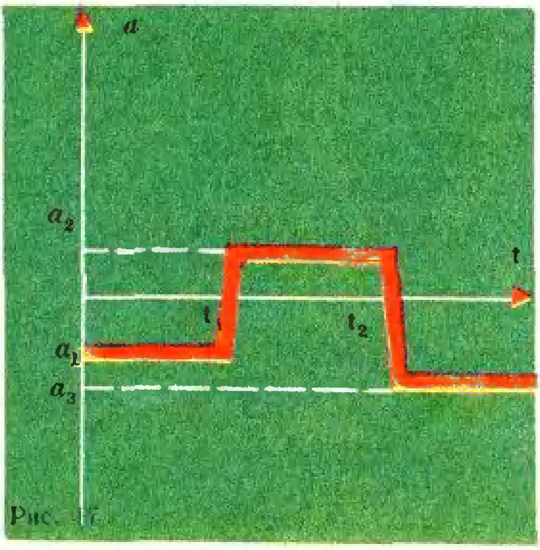



Рис. 17.

6. Два велосипедиста выехали в одном направлении с интервалом в 10 секунд. Первый в течение 5 секунд двигался с ускорением $a_1 = 2$ *м/сек*$^2$, затем с постоянной достигнутой им скоростью, а после выезда второго велосипедиста — замедленно с ускорением $a_1' = -0{,}25$ *м/сек*$^2$. Второй велосипедист двигался с ускорением $a_2 = 1$ *м/сек*$^2$. Как только скорости велосипедистов сравнялись, оба продолжили движение с постоянной скоростью. По графику скорости найти: 1) когда и на каком расстоянии от начальной точки сравнялись скорости велосипедистов; 2) чему равна эта скорость; 3) путь первого велосипедиста до момента выезда второго.

7. Два шарика начали одновременно и с одинаковой скоростью двигаться по поверхностям, имеющим форму, показанную на рисунке 18. Как будут отличаться скорости и времена движения шариков, когда они прибудут в точку $B$?

# Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1970 года

А. Л. Тоом

В первом номере нашего журнала (стр. 56), а также в «Учительской газете» (26 февраля 1970 г.) были опубликованы задачи, которые нужно было решить, чтобы поступить в Заочную математическую школу. ЗМШ получила около 6000 писем от восьмиклассников с решением задач, около 3000 из них приняты в школу.

Мы думаем, что задачи заинтересовали не только тех, кто прислал письма в ЗМШ, но и многих других читателей «Кванта», в том числе и будущих кандидатов в ЗМШ, и потому сегодня публикуем решение задач. Почти все задачи разобраны очень подробно, «досконально», чтобы прояснить решение даже для не очень подготовленных читателей. Для удобства читателей мы повторяем здесь условия задач.

Мало решить задачу и получить верный ответ: надо еще суметь ее записать, что совсем не легко. Поэтому мы советуем прочитать эти решения даже тем, кто решил задачи, и сравнить со своими. Разумеется, приведенные здесь решения — не единственно возможные, но, читая их, можно понять, как надо точно и логично записывать решения задач.

**Вступительная контрольная работа в ЗМШ 1970 года (условия задач)**

1. Математик шел домой по берегу ручья вверх по течению со скоростью, в полтора раза большей, чем скорость течения ручья, и держал в руках палку и шляпу. В некоторый момент он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжал идти вверх по течению ручья с той же скоростью. Через некоторое время он заметил ошибку, бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью, вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно выудил ее из воды, повернулся и пошел вверх *) по течению с первоначальной скоростью. Через 10 *мин* он встретил плывущую по ручью палку. Насколько раньше он пришел бы домой, если бы не перепутал палку со шляпой?

2. Для всякого ли треугольника $ABC$ найдется такая точка $P$, что все три точки, симметричные точке $P$ относительно прямых $AB$, $BC$ и $AC$, лежат на окружности, описанной около треугольника $ABC$?

3. Для каких значений $a$ разность корней уравнения $ax^2+x-2=0$ равна 3?

4. Студент за пять лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов на четвертом курсе?

5. Основания равнобочной трапеции — 4 *см* и 8 *см*, ее площадь — 21 *см*$^2$. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании: меньшее основание или боковую сторону трапеции?

6. Все цифры некоторого четырехзначного числа, являющегося полным квадратом, можно уменьшить на одно и то же число так, что получится четырехзначное число, тоже являющееся полным квадратом. Найти все такие числа.

7. Может ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до всех его вершин быть больше его периметра?

8**). Один из трех гангстеров, известных в городе $M$ под кличками Арчи, Босс и Весли, украл портфель (с деньгами). На допросе каждый из них сделал три заявления:

А р ч и: 1) Я не брал портфель.
2) В день кражи я уезжал из города $M$.
3) Портфель украл Весли.

Б о с с: 1) Портфель украл Весли.
2) Если бы я и взял его, я бы не сознался.
3) У меня и так много денег.

В е с л и: 1) Я не брал портфель.
2) Я давно ищу хороший портфель.
3) Арчи прав, говоря, что он уезжал из $M$.

В ходе следствия выяснилось, что из трех заявлений каждого гангстера два верных, а одно неверное. Кто украл портфель?

9. Найти целые числа $x$ и $y$ такие, что $x>y>0$ и $x^3+7y=y^3+7x$.

10. Квадратная площадь размером 100 *м* $\times$ 100 *м* выложена квадратными плитами 1 *м* $\times$ 1 *м* четырех цветов: белого, красного, черного и серого—так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (т. е. не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

11. Решить уравнение

$$(x^2+6x-4)(x^2+6x-3)=12.$$

12. Дан треугольник $ABC$. Найти точки $K$ и $H$, лежащие соответственно на сторонах $AB$ и $BC$, такие, что $BK=KH=HC$.

13. Найти все такие простые числа $p$, что $p^2+13$ тоже простое.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Прежде всего заметим, что потерянное математиком время, то есть то время, которое требуется найти, состоит из двух слагаемых: а) времени, которое он бежал назад и которое мы обозначим через $t$ (минут); б) времени, которое он потратил, чтобы пройти пешком то расстояние, которое пробежал; поскольку бежал он вдвое быстрее, чем шел, то это время равно $2t$, а все потерянное время равно $3t$.

Итак, достаточно вычислить $t$. Обозначим скорость течения через $v$. Тогда скорость ходьбы равна $\frac{3}{2}v$, а скорость бега равна $3v$. Рассмотрим ситуацию с того момента, когда математик, бросив в воду палку, побежал назад, до того, когда он встретил плывущую ему навстречу палку. Бежал он

---

*) Это слово «вверх» было по ошибке пропущено в № 1 «Кванта», что затруднило некоторым читателям понимание условия задачи.

**) В других изданиях эта задача была опубликована в иной формулировке:

До Царя Гороха дошла молва, что наконец кто-то убил Змея Горыныча. Царь Горох знал, что это мог сделать либо Илья Муромец, либо Добрыня Никитич, либо Алеша Попович. А вот и они, запыленные, явились ко двору. Царь стал их спрашивать. Трижды каждый богатырь речь держал. И сказали они так:

И л ь я М у р о м е ц: 1) Не я убил Змея Горыныча. 2) Я уезжал в заморские страны. 3) Змея Горыныча убил Алеша Попович.

Д о б р ы н я Н и к и т и ч: 1) Змея Горыныча убил Алеша Попович. 2) Если бы я его и убил, то не сказал бы. 3) Много еще нечистой силы осталось.

А л е ш а П о п о в и ч: 1) Не я убил Змея Горыныча. 2) Я давно ищу, какой бы подвиг совершить. 3) И взаправду Илья Муромец уезжал в заморские страны.

Потом царь Горох узнал, что дважды каждый богатырь правду говорил, а один раз лукавил. Кто убил Змея Горыныча?

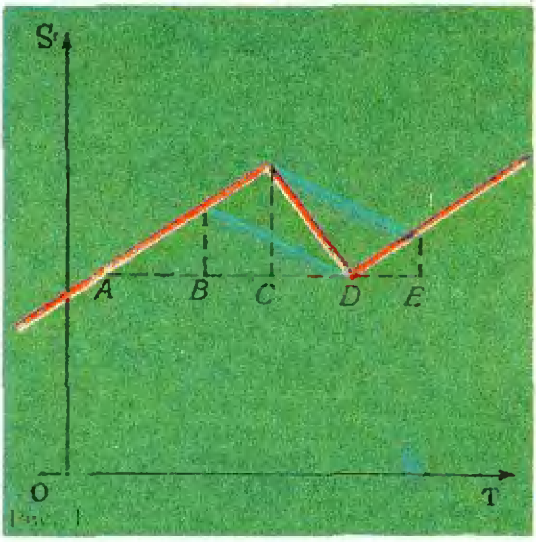



Рис. 1

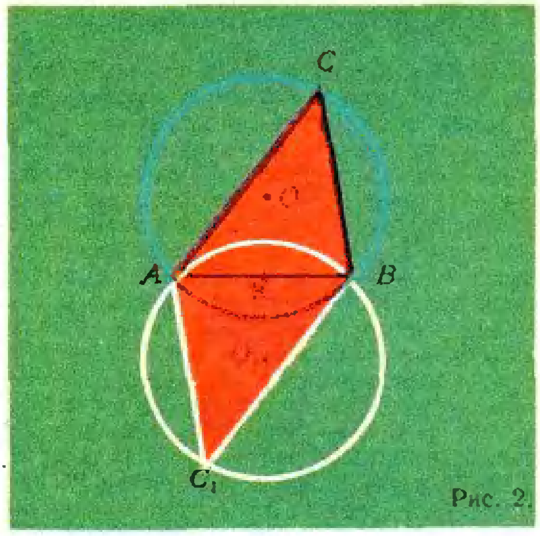



Рис. 2

время $t$ со скоростью $3v$ и, следовательно, пробежал расстояние $t\cdot 3v$. Затем он пошел назад со скоростью $\frac{3}{2}v$ и за 10 *мин* прошел расстояние $10\cdot\frac{3}{2}v$. Палка плыла все это время, то есть $(t+10)$ *мин*, со скоростью $v$ и проплыла $(t+10)\cdot v$. Очевидно, первое из вычисленных здесь расстояний равно сумме двух других:

$$t\cdot 3v=10\cdot\frac{3}{2}v+(t+10)\cdot v.$$

Сократив на $v$, находим, что $t=12{,}5$, откуда $3t=37{,}5$.

Ответ: 37,5 *мин*.

Можно задачу эту решить и с помощью графиков (см. рис. 1; здесь $S$ — расстояние от устья ручья вверх по течению, $T$ — время; красная линия — путь математика; голубые отрезки — плывущие шляпа и палка). По условию $\frac{AC}{CD}=2$ и $BC=DE$, откуда можно найти отношение отрезков $AB:BC:CD:DE=6:4:5:4$ и $\frac{AD}{DE}=\frac{AD}{10\ мин}=\frac{15}{4}$, откуда $AD=37{,}5$ *мин*.

2. Точка $P$ должна удовлетворять трем требованиям:

1) точка $P_1$, симметричная $P$ относительно $AB$, лежит на описанной окружности;
2) точка $P_2$, симметричная $P$ относительно $BC$, лежит на описанной окружности;
3) точка $P_3$, симметричная $P$ относительно $CA$, лежит на описанной окружности.

Найдем сначала все точки $P$, удовлетворяющие требованию 1). Все такие точки $P$ образуют окружность, симметричную описанной окружности относительно $AB$ (проведена на рисунке 2 белым цветом).

Таким образом, требование 1), предъявляемое к точке $P$, можно переформулировать так:

1′) точка $P$ лежит на окружности $O_1$, симметричной описанной окружности относительно $AB$.

Совершенно аналогично убеждаемся в том, что требования 2), 3) можно переформулировать в требования о том, чтобы точка $P$ лежала на окружностях $O_2$, $O_3$, симметричных описанной окружности относительно $BC$ и $CA$.

Надо выяснить, для всякого ли треугольника найдется точка $P$, лежащая сразу на всех трех окружностях $O_1$, $O_2$, $O_3$, иными словами, для всякого ли треугольника эти три окружности $O_1$, $O_2$, $O_3$ проходят через одну точку. Докажем, что это действительно так для любого треугольника $ABC$.

Придумать такое рассуждение, которое годилось бы сразу для всех треугольников $ABC$, довольно трудно (дело в том, что мы заранее не знаем, где лежит точка $P$ пересечения окружностей $O_2$ и $O_3$ — внутри треугольника или вне его, по какую сторону от каждой из прямых $AB$, $BC$ и $CA$ и т. п., и если рассуждение зависит от расположения точки $P$, то нужно разбирать несколько частных случаев). Но для экономии места мы все-таки приведем именно такое решение, которое годится сразу для всех случаев, правда, несколько искусственное.

Заметим, что окружность $O_1$ можно получить из окружности $O$ не только симметрией относительно стороны $AB$, но и симметрией относительно точки $K$ — середины стороны $AB$, т. е. поворотом относительно точки $K$ на 180°. А что будет, если вместе с окружностью $O$ повернуть и треугольник $ABC$? Ясно, что он перейдет в $\triangle ABC_1$, который дополняет $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABC_1C$, причем $\triangle ABC_1$ вписан в окружность $O_1$ (рис. 3). Проделав такие же построения около сторон $BC$ и $CA$, мы получим четыре равных треугольника, вместе составляющих один

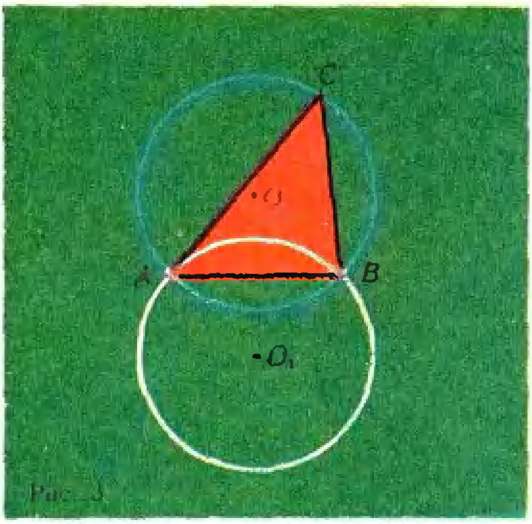



Рис. 3

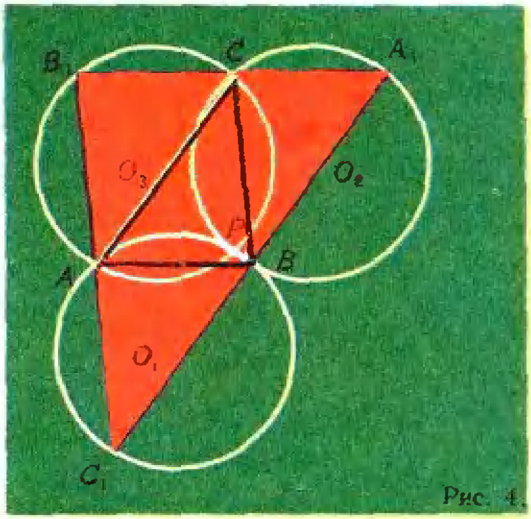



Рис. 4

большой $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 4; мы еще не знаем, проходят ли окружности $O_1$, $O_2$ и $O_3$ через одну точку!).

Рассмотрим две равные окружности $O_1$ и $O_3$, и пусть $P$ — точка их пересечения. Тогда, поскольку $AB_1=AC_1$ и дуги $AP$ в обеих окружностях равны, легко доказать, что $\triangle AB_1P=\triangle AC_1P$ и точка $P$ диаметрально противоположна точке $C_1$ в окружности $O_1$. Точно так же доказывается, что окружность $O_1$ пересекается с $O_2$ в той же точке, диаметрально противоположной точке $C_1$. Значит, все три окружности $O_1$, $O_2$, $O_3$ пересекаются в одной точке $P$.

Примечание. Нетрудно доказать, что эта точка $P$ — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, и что эта же точка $P$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$. Если догадаться хотя бы об одном из этих фактов, то можно предложить другие решения этой задачи.

3. Уравнение имеет два корня:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2a},$$

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2a},$$

если $a\neq 0$ и $1+8a\geq 0$.

Тот факт, что разность корней равна 3, выражается одной из следующих формул:

$$x_1-x_2=3 \text{ или } x_1-x_2=-3,$$

что можно записать одним равенством так:

$$(x_1-x_2)^2=9,$$

откуда

$$\left(\frac{-\sqrt{1+8a}}{a}\right)^2=9.$$

$$1+8a=9a^2, \quad 9a^2-8a-1=0.$$

Решив это уравнение, получаем

ответ: $a=1$ или $a=-\frac{1}{9}$.

4. Обозначим число экзаменов на каждом курсе от первого до пятого соответственно через $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$. Тогда условие задачи выражается следующей системой условий:

$$\begin{cases} x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \text{ — целые;} \\ 0<x_1<x_2<x_3<x_4<x_5; \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=31; \\ 3x_1=x_5. \end{cases} \qquad (1)$$

Найти надо $x_4$.

Сначала выясним, каким может быть $x_1$. Если $x_1=2$, то $x_5=6$. Тогда $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, и их сумма равна 20, что меньше 31. Если $x_1=1$, то $x_5=3$, и подобрать $x_2$, $x_3$, $x_4$, удовлетворяющие системе (1), явно невозможно.

Если $x_1\geq 4$, то $x_5\geq 12$, а кроме того, $x_2\geq 5$, $x_3\geq 6$, $x_4\geq 7$. Тогда сумма их всех больше или равна $4+5+6+7+12=34>31$.

Итак, $x_1$ может быть равно только трем. Если $x_1=3$, то $x_5=9$. Между 3 и 9 пять целых чисел: 4, 5, 6, 7, 8. Из них надо выбрать значения для $x_2$, $x_3$, $x_4$, причем так, чтобы их сумма была равна $31-3-9=19$. Если $x_4\leq 7$, то $x_3\leq 6$, $x_2\leq 5$; тогда их сумма меньше или равна 18. Значит, $x_4=8$. ($x_2$ и $x_3$ могут быть равны 4 и 7 или 5 и 6.)

Ответ. 8 экзаменов.

5. Пусть в трапеции $ABCD$ $AD$ — большее, а $BC$ — меньшее основания (рис. 5). Опустим из точек $B$, $C$ высоты $BE$, $CF$. Площадь трапеции равна $\frac{1}{2}\cdot BE\,(AD+BC)$, отсюда $BE=3{,}5$ *см*. Очевидно, $AE=FD$, а так как $AE+FD=AD-BC=4$ *см*, то $AE=2$ *см*. Тогда

$$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=$$

$$=\sqrt{4+(3{,}5)^2}\ \text{см}=\frac{\sqrt{65}}{2}\ \text{см}.$$

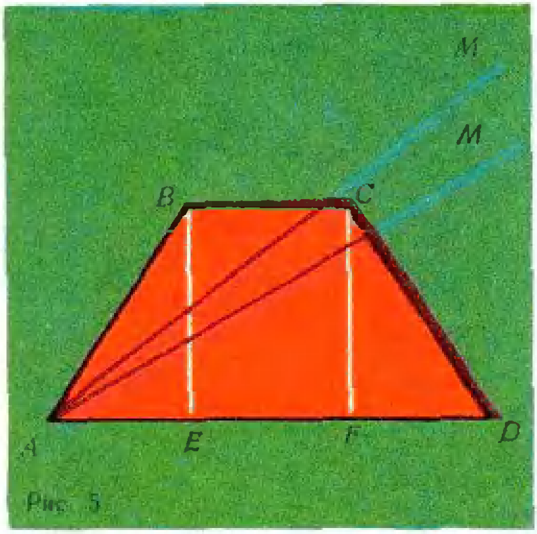


Рис. 5

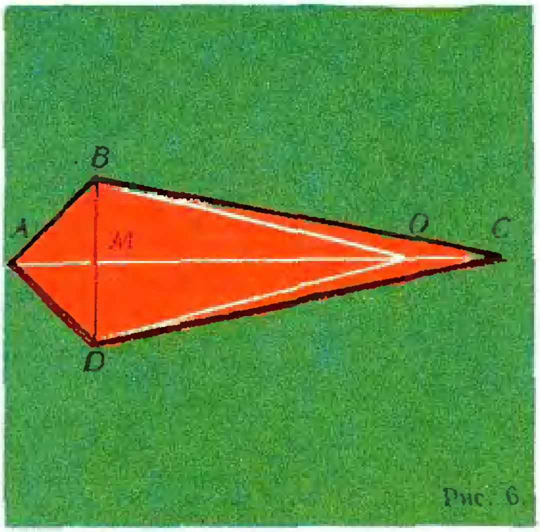


Рис. 6

Проведем теперь диагональ $AC$. Мы должны узнать, по какую сторону от нее проходит биссектриса $AM$ угла $BAD$. (На рис. 5 два ее возможных положения указаны синими линиями.) Для этого выясним, какой угол больше: $\angle BAC$ или $\angle CAD$. Поскольку $\angle CAD=\angle BCA$, то можно сравнивать $\angle BAC$ и $\angle BCA$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Значит, надо сравнить стороны $AB$ и $BC$. Их длины: $\frac{\sqrt{65}}{2}$ *см* и 4 *см*.

Но $\sqrt{65}>\sqrt{64}=8$. Поэтому

$$AB=\frac{\sqrt{65}}{2}\text{ см} > \frac{8}{2}\text{ см} = BC.$$

Поэтому $\angle BCA > \angle BAC$, поэтому

$$\angle CAD > \frac{\angle CAD+\angle BAC}{2} = \angle MAD.$$

Ответ: $AM$ — биссектриса угла $BAD$ — пересекает $CD$, а не $BC$.

6. Обозначим через $x$ число, на которое уменьшаются все цифры. От уменьшения всех четырех цифр на $x$ наше четырехзначное число уменьшается на $x+10x+100x+1000x=1111\cdot x$. Оба четырехзначных числа — полные квадраты. Обозначим их через $m^2$ и $n^2$, где $m$, $n$ — целые числа, $m>n\geq 0$. Итак, $m^2-1111\cdot x=n^2$, или

$$(m+n)(m-n)=1111\cdot x=101\cdot 11\cdot x.$$

Число 101 простое. Поэтому, так как число $(m+n)(m-n)$ делится на 101, то одно из чисел $(m+n)$, $(m-n)$ должно делиться на 101. Поскольку числа $m^2$ и $n^2$ четырехзначны, то оба они меньше 10 000, а $m$ и $n$ меньше 100 каждое. Тогда число $(m-n)$ меньше 100 и не может делиться на 101. Значит, число $(m+n)$ делится на 101. Но раз $m<100$, $n<100$, то $m+n<200$. Число, меньшее 200 и кратное 101,— это только 101. Итак,

$$m+n=101; \quad m-n=11\cdot x.$$

Теперь можно перебрать все возможные значения $x$ от 1 до 9, для каждого вычислить $m^2$ и $n^2$, проверить, выполняется ли данное условие. Эта работа облегчается, если сообразить, что $x$ может быть только нечетным числом. Действительно, если число $x$ четное, то и $11\cdot x$ четное; тогда $101+11\cdot x$ нечетное, что противоречит тому, что

$$m=\frac{1}{2}(101+11\cdot x).$$

Пусть $x=1$. Тогда $m=\frac{101+11}{2}=56$; $n=\frac{101-11}{2}=45$, $m^2=3136$; $n^2=2025$, т. е. $x=1$ подходит.

Пусть $x=3$. Тогда $m=\frac{101+33}{2}=67$; $n=\frac{101-33}{2}=34$. $m^2=4489$; $n^2=1156$, т. е. $x=3$ подходит.

Пусть $x=5$. Тогда

$$n=\frac{101-55}{2}=23,$$

$n^2=529$, а по условию $n^2$ четырехзначно. Значит, $x=5$ не подходит. При $x=7$, $x=9$ $n^2$ будет еще меньше.

Ответы: 3136; 4489.

7. Ответ: может.

Для доказательства достаточно построить пример. Идея доказательства: надо три вершины $A$, $B$, $C$ четырехугольника поместить очень близко друг от друга, а четвертую вершину $D$ и точку $O$ внутри — далеко от $A$, $B$ и $C$ и близко друг от друга. Пусть расстояние от места, где находятся $A$, $B$, $C$, до места, где находятся $D$ и $O$, равно $l$. Тогда

$$AB\approx 0,\quad BC\approx 0,\quad CD\approx l,\quad DA\approx l,$$
$$OA\approx l,\quad OB\approx l,\quad OC\approx l,\quad OD\approx 0.$$
$$AB+BC+CD+DA\approx 2l,$$
$$OA+OB+OC+OD\approx 3l,$$

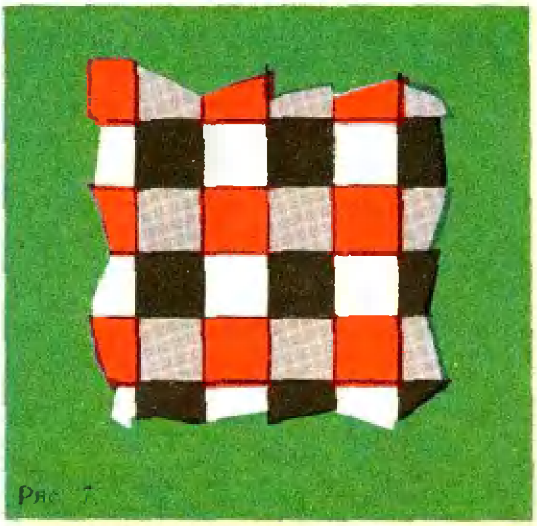


Рис. 7.

а $2l < 3l$.

То, что здесь написано, только в дружеской, ни к чему не обязывающей беседе, можно считать решением.

Точное решение этой задачи «для письменного экзамена» может выглядеть, например, так: построим четырехугольник $ABCD$ и точку $O$ внутри него, как показано на рисунке 6, где $BD \perp AC$, $AM = BM = DM = 1$, $OM = 100$, $CM = 101$. Тогда

$$OA + OB + OC + OD = 101 + 2 \cdot BO + 1,$$

$$AB + BC + CD + DA = 2\sqrt{2} + 2 \cdot BC.$$

Поскольку $BC < OB + OC = OB + 1$, то $2 \cdot BC < 2 \cdot OB + 2$ и, следовательно, $AB + BC + CD + DA < 2\sqrt{2} + 2 \cdot BO + 2 < 100 + 2 \cdot BO + 2 = OA + OB + OC + OD$.

8*). Возможны три предположения о том, кто украл портфель. Рассмотрим их по очереди с тем, чтобы выяснить, какие из них противоречат условию.

1). Пусть портфель украл Арчи. Тогда первое и третье его заявления неверны, а в условии сказано, что только одно из заявлений неверно. Значит, это предположение противоречит условию; Арчи не мог украсть портфель.

2). Пусть портфель украл Босс. Тогда первое его заявление неверно, следовательно, остальные два должны быть верны. Правда, во втором его заявлении как бы подразумевается что он, Босс, не брал портфеля, но прямо он этого не говорит, и поэтому противоречия не возникает. Далее, третье заявление Арчи тогда не верно, следовательно, первые два должны быть верными. Раз верно второе заявление Арчи, то верно и третье заявление Весли, а так как верно первое, то второе неверно.

Мы видим, что никаких противоречий с условием не возникает. Значит Босс мог украсть портфель.

3). Пусть портфель украл Весли. Тогда первое его заявление неверно, а потому второе и третье верны. Раз верно третье заявление Весли, то верно и второе заявление Арчи. Первое и третье заявления Арчи также верны. Значит, верны все три заявления Арчи, что противоречит условию. Весли не мог украсть портфель.

О т в е т: портфель украл Босс.

П р и м е ч а н и е. Можно ли было, рассмотрев предположение, что портфель украл Босс, и убедившись, что оно удовлетворяет условию, на этом успокоиться и считать его доказанным? Нет.

Ведь могло оказаться, что собранных в условии данных вообще недостаточно для того, чтобы определить, кто именно украл портфель.

9. Преобразуем:

$$(x^3 - y^3) - 7(x - y) = 0,$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) - 7(x - y) = 0,$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 7) = 0.$$

Поскольку $x > y$, то $x - y \neq 0$, значит, вторая скобка равна нулю:

$$x^2 + xy + y^2 - 7 = 0,$$

$$x^2 + xy + y^2 = 7.$$

Каждое из трех чисел $x^2$, $xy$, $y^2$ — целое, положительное и меньше семи. Тогда $x$, $y$ могут быть равны только 1 или 2 (уже при $x = 3$ $x^2 = 9 > 7$). Так как $x > y$, то $x = 2$, $y = 1$. Подстановкой убеждаемся, что это решение задачи.

О т в е т: $x = 2$, $y = 1$.

10. Прежде всего убедимся в том, что площадь можно выложить плитами так, как требуется в условии. Это можно сделать, например, так, как показано на рисунке 7. Закон расположения плит на всей площади ясен из нарисованной части. Жирные линии проведены, чтобы этот закон легче было понять. При таком расположении плит всех цветов по 2500 штук. Значит, красных плит может быть 2500. Докажем, что никакое другое число красных плит не возможно.

Пусть площадь каким-то образом выложена плитами в соответствии с условием. Разобьем ее на квадраты 2 *м* × 2 *м*, содержащие по 4 плиты, как это сделано на рисунке 7. Всего таких квадратов 2500. Рассмотрим один такой квадрат. 4 плиты, из которых он состоит, соприкасаются каждая с каждой. Поэтому они все должны быть разных цветов, то есть по одной каждого цвета. Поскольку в каждом квадрате одна красная плита, а квадратов 2500, то и красных плит 2500.

11. Введем обозначение: $x^2 + 6x = y$. Тогда

$$(y - 4)(y - 3) = 12.$$

$$y^2 - 7y = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 7.$$

*) Задача про Змея Горыныча решается аналогично. (О т в е т: Змея Горыныча убил Добрыня Никитич.)

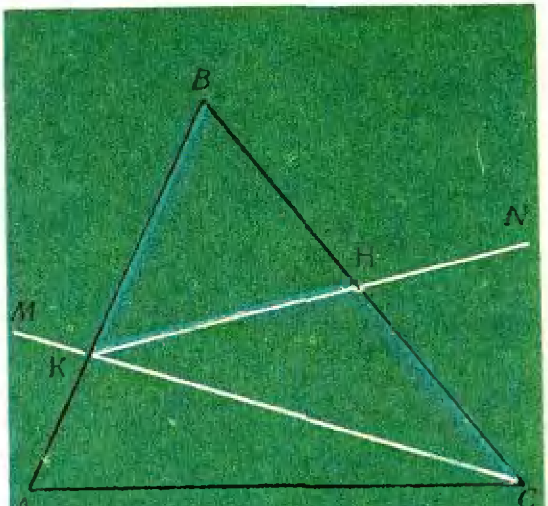



Рис. 8.

Теперь надо решить два уравнения:

1) $x^2+6x=0$, $x_1=0$, $x_2=-6$;

2) $x^2+6x=7$, $x^2+6x-7=0$,

$x_1=-7$, $x_2=1$.

Ответ: $x_1=-7$; $x_2=-6$; $x_3=0$; $x_4=1$.

**12.** 1) Анализ. Поскольку $KB=KH$, то $\angle KHB=\angle B$. Проведем $KC$. Поскольку $KH=HC$, то $\angle HKC=\angle HCK$. Но их сумма равна внешнему углу $\angle KHB$: $\angle HKC+\angle HCK=\angle KHB$ (см. рис. 8). Значит, каждый из них равен его половине:

$$\angle CKH=\angle KCH=\frac{1}{2}\angle KHB=\frac{1}{2}\angle B.$$

2) Построение. Пусть дан $\triangle ABC$. Разделим $\angle B$ пополам и построим угол $\angle BCM=\frac{1}{2}\angle B$ так, что луч $CM$ лежит по ту же сторону от прямой $BC$, что и точка $A$. Пусть луч $CM$ пересекает сторону $AB$ (а не ее продолжение) в точке $K$. Построим угол $\angle CKN=\frac{1}{2}\angle B$ так, что луч $KN$ лежит по ту же сторону от прямой $CK$, что и точка $B$. Пусть луч $KN$ пересекает сторону $BC$ (а не ее продолжение) в точке $H$. Построенные точки $K$, $H$ — искомые.

3) Доказательство. По построению $\angle HKC=\angle HCK$, поэтому $KH=HC$. Далее,

$$\angle KHB=\angle HKC+\angle HCK=\frac{1}{2}\angle B+$$

$$+\frac{1}{2}\angle B=\angle B,$$

поэтому $KB=KH$

4) Исследование. В пункте «Анализ» было доказано, что если $K$, $H$ — искомые точки, то $\angle CKH=\angle KCB=\frac{1}{2}\angle B$. Пользуясь этим, легко доказать, что решение (если оно существует) единственно.

Выясним теперь, когда решение существует. При построении были сделаны два предположения:

1) что луч $CM$ пересекает $AB$,

2) что луч $KN$ пересекает $BC$.

Первое из этих предположений выполняется, если $\frac{1}{2}\angle B<\angle C$ в $\triangle ABC$. Второе выполняется, если $\frac{1}{2}\angle B<\angle CKB=180^\circ-$ $-\angle B-\frac{1}{2}\angle B$, то есть при $\angle B<90^\circ$. Если оба эти условия выполняются, то построение выполнимо и решение существует.

Докажем, что если решение существует, то эти два условия выполняются. Пусть $K$, $H$ — искомые точки. Тогда по доказанному $\angle BCK=\frac{1}{2}\angle B$. Но поскольку точка $K$ лежит на $AB$, то $\angle BCK<\angle BCA$, откуда $\frac{1}{2}\angle B<\angle C$. Далее, так как точка $H$ лежит на $BC$, то $\angle CKH<\angle CKB$. Поскольку точки $K$, $H$ искомые, то (как доказано) $\angle CKH=\frac{1}{2}\angle B$, $\angle CKB=180^\circ-$ $-\frac{3}{2}\angle B$. Поэтому $\frac{1}{2}\angle B<180^\circ-$ $-\frac{3}{2}\angle B$, откуда $\angle B<90^\circ$. Итак, если в $\triangle ABC$ $\angle B<90^\circ$ и $\frac{1}{2}\angle B<\angle C$, то решение существует и единственно, в противном случае (т. е. если хоть бы одно из этих условий не выполняется) решений нет.

**13.** Если $p$ — простое число и $p>2$, то $p$ нечетно. Тогда $p^2$ тоже нечетно, а $p^2+13$ четно и больше, чем 2, т. е. $p^2+13$ — составное число. Значит, $p$ может равняться только двум. В этом случае $p^2+13=19$ тоже простое число.

Ответ: $p=2$.

# Карандаш в петлице пиджака

Возьмите карандаш, сделайте в нем желобок около одного из концов, потом свяжите из веревки петлю так, чтобы длина веревки на петле была меньше удвоенного расстояния от желобка до другого конца карандаша (см. рис. 1). Теперь привяжите оставшимися концами веревки петлю к карандашу, охватывая карандаш по желобку, предварительно пропустив петлю в петлицу пиджака, а карандаш в петлю так, как показано на рис. 2. Желобок нужен для того, чтобы петля была жестко прикреплена к карандашу.

А теперь попытайтесь, не развязывая веревку, не разрывая ее, не ломая карандаша, снять карандаш с вашего пиджака.

С этой задачей связана небольшая история. В 1951 году замечательный советский математик, ныне член-корреспондент Академии наук СССР, И. Р. Шафаревич читал свой первый курс лекций в МГУ. Во время перерыва студенты показали ему эту задачу. Игорь Ростиславович попробовал один вариант, другой, но ... карандаш оставался на его пиджаке и на следующем часу лекции, и после нее.

Когда Игорь Ростиславович появился на следующей своей лекции через несколько дней, то карандаш продолжал украшать его пиджак. Однако лекция началась с того, что Шафаревич торжественно освободился от этого украшения.

А как получится у вас?

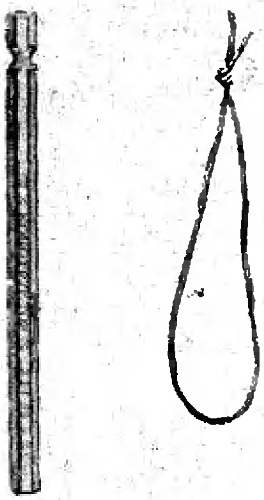


Рис. 1.

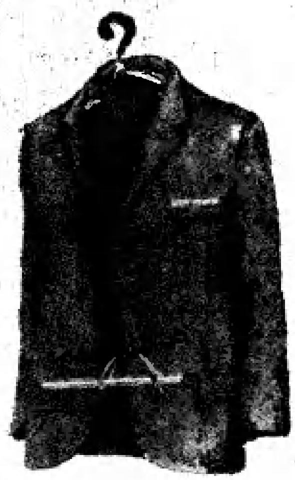


Рис. 2.

# ЗАДАЧИ ДЛЯ 5 КЛАССА

*В предыдущем номере журнала мы начали публикацию задач для пятого класса из нового пробного учебника, обучение по которому начнется с 1970—1971 учебного года *).*

*В этом номере «Кванта» помещаем новые задачи.*

*Предлагаем читателю решить их или же прислать отзывы на них.*

**1215**. Для покупки порции мороженого у Пети не хватило 7 коп., а у Маши — 1 коп. Тогда они сложили имевшиеся у них деньги. Но их тоже не хватило на покупку одной порции мороженого. Сколько стоила порция мороженого?

**1216**. Я еду в поезде, который идет со скоростью 40 *км/час*, и вижу, как в течение 3 секунд мимо моего окна проходит встречный поезд, имеющий длину 75 *м*. С какой скоростью шел встречный поезд?

**1217**. Пассажир, проезжая в трамвае, заметил знакомого, который шел вдоль линии трамвая в противоположную сторону. Через 10 секунд пассажир вышел из трамвая и пошел догонять своего знакомого. Через сколько времени он догонит знакомого, если идет в 2 раза быстрее знакомого и в 5 раз медленнее трамвая?

**1218**. В этой задаче на деление буквами зашифрованы цифры. Одинаковые буквы означают одинаковые цифры. Попробуйте расшифровать пример:

$$\begin{array}{r l} -ABCD & : CD = BCD \\ CD & \\ \hline -EC & \\ DF & \\ \hline -BCD & \\ BCD & \\ \hline 0 & \end{array}$$

**1220**. Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 синюю, 75 зеленую. Каково наименьшее число кубиков, которые имеют грани всех трех цветов?

**1227**. Выразить одним неравенством утверждение: число $a$ больше, чем —1, и это же число $a$ меньше, чем 1.

**1228**. Четыре спортсменки — Аня, Валя, Галя и Даша — заняли первые четыре места на соревнованиях по гимнастике, причем никакие две из них не делили между собою какие-нибудь два места. На вопрос, какое место заняла каждая из них, трое зрителей дали три разных ответа:
1) Аня — второе, Даша — третье;
2) Аня — первое, Валя — второе;
3) Галя — второе, Даша — четвертое.
В каждом из этих ответов одно утверждение верно, а второе ложно. Какое место заняла каждая спортсменка?

**1232**. Найти пятизначное число, которое после умножения на 9 дает число, изображенное теми же цифрами, но в обратном порядке.

*) Н. Я. Виленкин, К. И. Нешков, С. И. Шварцбурд, А. Д. Семушин, А. С. Чесноков, Т. Ф. Нечаева, под редакцией А. И. Маркушевича, «Математика», 5 класс, «Просвещение», 1969.


## РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

# ВСЕ, ЧЕМ ЗАНИМАЮТСЯ МАТЕМАТИКИ

В книге известного австралийского математика и популяризатора У. У. Сойера *) раскрывается существо математического мышления, показаны основные идеи и движущие силы математики. Автор остроумно и в занимательной форме показывает всю вздорность укоренившегося представления о математике как о скучной и формальной науке. Мы помещаем здесь сокращенный пересказ введения к этой книге.

---

*) У. У. Сойер, Прелюдия к математике, М., «Просвещение», 1965.

Почти все математические открытия имеют в основе очень простую идею. Учебники часто скрывают этот факт. Они обычно содержат громоздкие выводы и этим создают впечатление, что математики — это люди, которые всю свою жизнь просиживают за письменными столами и переводят тонны бумаги. Это чепуха. Многие математики очень успешно работают в ванной, в кровати, ожидая поезда или катаясь на велосипеде (предпочтительно при слабом уличном движении). Математические вычисления производятся до или после открытия. Само открытие возникает из основных идей.

Немногие представляют себе, как огромна сфера действия современной математики. Вероятно, было бы легче овладеть всеми существующими языками, чем всеми математическими знаниями, известными в настоящее время. Мне кажется, что все языки можно было бы выучить за одну человеческую жизнь, а всю математику, конечно, нет. К тому же объем математических знаний не остается неизменным. Ежегодно публикуются все новые открытия. Например, в 1951 г. для реферативного изложения всех математических статей, вышедших за год, потребовалось 900 печатных страниц крупного формата. Только за январь упомянуто 451 название, причем реферировались статьи и книги, рассматривающие новые проблемы; лишь в немногих из них упоминались известные факты.

Человеку, желающему быть в курсе всего нового в математике, пришлось бы прочитывать ежедневно около 15 статей, весьма больших по объему и содержащих сложные математические выкладки. Трудно даже мечтать о выполнении подобной задачи.

Открытия, которые делают математики, столь разнообразны по своему характеру, что однажды кто-то, видимо, в отчаянии предложил определить математику как «все, чем занимаются математики». Казалось, что только такое широкое определение может охватить все, что относится к математике. Математики решают проблемы, которые в прошлом не считались математическими, и трудно предсказать, чем еще они будут заниматься в будущем.

Точнее было бы определение: «Математика — это классификация всех возможных задач и методов их решения». Это определение, пожалуй, тоже расплывчато, так как оно охватывало бы даже такие рубрики, как газетные объявления «Обращайтесь со всеми вашими сердечными заботами к тете Мини», что мы никак не имеем в виду.

Для нас достаточно было бы определение: «Математика — это классификация и изучение всех возможных закономерностей». Слово «закономерность» здесь используется в таком смысле, с которым многие могут не согласиться, а именно в самом широком смысле, как название любого рода закономерностей, которые могут быть познаны умом.

Любая математическая теория должна непременно сочетать в себе мощь метода, обусловливающую возможность применений к естественным наукам, и красоту, стройность, столь привлекательную для ума. Нам кажется, что наше определение математики удовлетворяет обоим этим требованиям.

Интересно заметить, что «чистые» математики, движимые только чувством стройности к математической форме, часто приходили к выводам, которые в дальнейшем оказывались чрезвычайно важными для науки. Греки изучали свойства эллипса более чем за тысячу лет до того, как Кеплер использовал их идеи для определения траекторий планет. Математический аппарат теории относительности был создан за тридцать — пятьдесят лет до того, как Эйнштейн нашел для него применение в физике. Подобных примеров можно было бы привести много. С другой стороны, много стройных теорий и проблем, которые любой «чистый» математик причислит к математике, возникли в связи с физикой.

Практики, как правило, не имеют представления о математике как о способе классификации всех проблем. Обычно они стремятся изучать только те разделы математики, которые уже оказались полезными для их специальности. Поэтому они совершенно беспомощны перед новыми задачами. Вот тогда-то они и обращаются за помощью к математике. (Это разделение труда между инженерами и математиками, вероятно, оправдано: жизнь слишком коротка для того, чтобы одновременно изучать и абстрактную теорию и инженерное дело.) Встреча математика и инженера обычно очень забавна. Инженер, ежедневно имея дело с машинами, настолько привыкает к ним, что не может понять чувство человека, видящего машину впервые. Он забрасывает своего консультанта-математика огромным количеством подробностей, которые для того ровным счетом ничего не значат. Через некоторое время инженер приходит к выводу, что математик — абсолютный невежда и что ему нужно объяснять простейшие вещи, как ребенку или Сократу. Но, как только математик поймет, что делает машина и что от нее требуется, он переводит задачу на язык математических терминов. После этого он может заявить инженеру одно из трех:

1) что эта задача известна и уже решена;

2) что это новая задача, которую он может попытаться решить;

3) что это одна из тех задач, которую математики безуспешно пытались решить, и что еще могут пройти века, прежде чем будет сделан хотя бы шаг к ее решению, и что поэтому инженеру придется решать ее эмпирически. К сожалению, третий случай встречается удручающе часто. Но первый и второй случай также довольно часты, и вот тогда-то математик, благодаря его знанию закономерностей, может принести пользу в тех областях, о которых он в некотором смысле ничего не знает.

Какими качествами должен обладать математик?

Для всех математиков характерна дерзость ума. Математик не любит, когда ему о чем-нибудь рассказывают, он сам хочет дойти до всего. Конечно, зрелый математик, узнав о каком-нибудь великом открытии, поинтересуется, в чем оно состоит, и не станет терять время на то, чтобы открывать уже открытое. Но я имею в виду юных математиков, у которых дерзость ума проявляется особенно сильно. Если вы, например, преподаете геометрию девяти-десятилетним ребятам и рассказываете им, что никто еще не смог разделить угол на три равные части при помощи линейки и циркуля, вы непременно увидите, что один-два мальчика останутся после уроков и будут пытаться найти решение. То обстоятельство, что в течение двух тысяч лет никто не решил эту задачу, не помешает им надеяться, что они смогут это сделать в течение часового перерыва на обед. Это, конечно, не очень скромно, но и не свидетельствует об их самонадеянности. Они просто не готовы принять любой закон, а ведь в действительности уже доказано, что невозможно разделить угол на три равные части при помощи линейки и циркуля. Их попытка найти решение — того же рода, что попытка представить число 2 в виде рациональной дроби.

Хороший ученик всегда старается забежать вперед. Если вы ему объясните, как решать квадратное уравнение дополнением до полного квадрата, он непременно захочет узнать, можно ли решить кубическое уравнение дополнением до полного куба. Остальные ученики класса не задают подобных вопросов. С них хватит и квадратных уравнений, они не ищут дополнительных трудностей.

Вот это желание исследовать является второй отличительной чертой математика. Это одна из сил, содействующих росту математика. Математик получает удовольствие от знаний, которыми уже овладел, и всегда стремится к новым знаниям.

Эту мысль можно пояснить на примере дробных показателей степени из школьного курса алгебры. Легко представить себе человека, который, поверхностно познакомившись с дробными и отрицательными показателями степени, начнет недоумевать, зачем все это нужно. Ведь приходится преодолевать столько логических трудностей! Мне представляется, что тот, кто открыл дробные показатели степени, сначала работал над целыми показателями и получил такое большое удовлетворение от этой работы, что ему захотелось развить этот раздел, и он готов был взять на себя логический риск. Ведь на первых порах новое открытие почти всегда является вопросом веры, и лишь позднее, когда становится ясным, что это действительно открытие, приходится находить логическое оправдание, которое удовлетворит самых придирчивых критиков.

Интерес к закономерностям — третье необходимое качество математика. Уже в самом начале арифметики встречаются закономерности. Например, из четырех камней можно сложить квадрат, а из пяти — нельзя

Математические, как и музыкальные, способности проявляются очень рано, с четырех лет, а иногда и раньше. Один малыш однажды сказал мне: «Мне нравится слово *september* (сентябрь), ведь получается *sEptEmbEr*». Сам я никогда не замечал закономерного чередования гласных и согласных в этом слове. Оно действительно совершенно симметрично. Такому ребенку, конечно, понравится арифметика.

Способность к обобщению — один из самых важных факторов, определяющих математика. Чем шире круг вопросов, к которым применим какой-нибудь общий принцип, тем чаще он нам поможет выпутаться из затруднений. Пуанкаре говорил: «Предположим, я занялся сложным вычислением и с большим трудом наконец получил результат; но все мои усилия окажутся напрасными, если они не помогут предвидеть результат в других аналогичных вычислениях, если они мне не дадут возможность проводить их с уверенностью, избегая тех ошибок и заблуждений, с которыми я должен был мириться в первый раз».

После обобщения результат становится более полезным. Вас, возможно, удивит, что обобщение почти всегда также упрощает результат. Более общий вывод легче воспринять, чем менее общий. Общая теорема редко содержит что-нибудь запутанное; ее цель — обратить ваше внимание на действительно важные факты.

В элементарной математике мы встречаем смесь всяких важных и неважных деталей. В высшей математике мы пытаемся разделить различные элементы и изучить каждый в отдельности. В этом смысле высшая математика, быть может, гораздо проще, чем элементарная.

Все, о чем мы говорили выше, имело целью расширить область вопросов, подвластных математике. Исследование, открытие закономерностей, объяснение смысла каждой закономерности, изобретение новых закономерностей по образу уже известных — все эти виды деятельности расширяют область действия математики. С практической точки зрения становится исключительно трудным следить за всеми полученными результатами, и нельзя сказать, чтобы нагромождение не связанных между собой теорем представляло отрадное зрелище. Будучи и деловыми людьми и художниками одновременно, математики чувствуют потребность собрать все эти разрозненные результаты.

Не удивительно, что вся история математики состоит из чередующихся процессов «расширений» и «сокращений». Например, внимание математиков привлекает какая-нибудь задача, пишутся сотни статей, каждая из которых освещает лишь одну сторону истины. Вопрос разрастается. Затем какой-нибудь гений, опираясь на все данные, собранные с таким трудом, заявляет: «Все, что мы знаем, становится почти очевидным, если посмотреть на это вот с такой точки зрения». После этого никому, кроме историков математики, нет уже необходимости изучать сотни отдельных статей. Разрозненные выводы объединяются в одну простую доктрину, важные факты отделяются от шелухи, и прямой путь к желаемому выводу открыт для всех. Объем сведений, которые нужно изучать, сократился. Но это еще не конец. После того как новый метод стал всеобщим достоянием, возникают новые вопросы, для решения которых он недостаточен, и снова начинаются поиски ответов, снова публикуются статьи, снова начинается процесс «расширения».

Если бы можно было свести все знания к двум общим законам, математик не был бы удовлетворен. Он не успокоился бы до тех пор, пока не доказал бы, что оба эти закона основываются на одном принципе. Но и тогда он не был бы счастлив, наоборот, он стал бы несчастным, так как ему нечего было бы делать. Но перспектива такого застоя совершенно невероятна. Жизнь такова, что решение одной проблемы всегда создает новую проблему; иначе жизнь была бы невыносима. Всегда есть и всегда будет материал для изучения и трудности, которые нужно преодолевать.

И так будет всегда. И если бы оказалось, что вся существующая математика рассматривает только явления со свойствами *A*, *B* и *C*, математики немедленно спросили бы: «А что случится, если какой-нибудь предмет будет обладать только одним из этих свойств? А если ни одним из них?» И они снова погрузились бы в работу.

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## К статье «Системы счисления»

**1.** *20101101110001 0.*

**2.** $((24\cdot60+2)\,60+32)\cdot60+42=5\,193\,162$.

**3.** $4(18\cdot20^4)+6(18\cdot20^3)+14(18\cdot20^2)+$
$+13(18\cdot20)+15\cdot20+1=12\,489\,781$.

**4.** а)

```
_123456 |7
  7      _17636 |7
 _53      14     _2519 |7
  49      _36     21    _359 |7
  _44      35     _41    35   _51 |7
   42      _13     35    _9    49  7
   _25       7     _69    7    2
    21      _66     63    2
    _46      63     6
     42      3
     4
```

Ответ: *722634.*

б)

```
_123456 |12
  12     _1028 |12
  _34      96   _85 |12
   24      _68   84  7
  _105      60   1
    96      8
    _96
     96
     0
```

Ответ: *7180.*

в)

| | |
|---|---|
| 123456 | 0 |
| 61728 | 0 |
| 30864 | 0 |
| 15432 | 0 |
| 7716 | 0 |
| 3858 | 0 |
| 1929 | 1 |
| 964 | 0 |
| 482 | 0 |
| 241 | 1 |
| 120 | 0 |
| 60 | 0 |
| 30 | 0 |
| 15 | 1 |
| 7 | 1 |
| 3 | 1 |
| 1 | 1 |

(В правом столбце мы пишем остаток от деления на 2, которое легко выполнять устно.)

Ответ: *11110001001000000.*

**5.** Полезно заготовить таблицу степеней 2:

| $n$ | $2^n$ | $n$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 5 | 32 |
| 1 | 2 | 6 | 64 |
| 2 | 4 | 7 | 128 |
| 3 | 8 | 8 | 256 |
| 4 | 16 | 9 | 512 |

Ответ: $P=32+4=36$,
$Q=256+64+16+4+1=341$.

**6.**

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 10 |
| 2 | 2 | 10 | 11 |

| × | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 11 |

**7.** а) $X=19$; б) запись $Y$ не означает никакого числа (см. упр. 8); в) $Z=49$.

**8.** Любая последовательность «$a_na_{n-1}\ldots a_0$», в которой $a_{3k}\leqslant1$, $a_{3k+1}\leqslant2$, $a_{3k+2}\leqslant1$ при всех $k$ и после двойки нигде не стоит единица (проверьте, что это условие необходимо и достаточно для того, чтобы неравенство $a_{k+1}>$ $>a_kq_k+a_{k-1}q_{k-1}+\ldots+a_0q_0$ выполнялось при всех $k$).

**9.** Да. Первое больше.

**10.** в) Если гири класть на одну чашку весов, то наименьшее необходимое число гирь — 10. Можно взять, например, такие гири: 1, 2, 4, 8,...,$512=2^9$. Девяти гирь (любого веса) заведомо недостаточно, поскольку из них можно выбрать всего $2^9-1=511$ разных комбинаций, состоящих из одной или нескольких гирь; даже если все эти комбинации дают разные веса, то все равно мы не получим все веса от 1 до 1000.

Если гири класть на обе чашки весов, то наименьшее необходимое число гирь — 7. (Например, годятся такие: 1, 3, 9, 27, ..., $729=$ $=3^6$; см. упр. 11.) Шести гирь недостаточно, поскольку отображений множества из 6 элементов во множество из трех элементов {левая чашка; правая чашка; коробка с гирями} всего $3^6=729$, а различных чисел $P_л-P_п$, где $P_л$ и $P_п$ — вес гирь на левой и правой чашке весов, должно получаться не менее 2001 (от $-1000$ до $+1000$).

**13.** $2q_n\leqslant q_{n+1}$; $q_{n-1}+q_n\leqslant q_{n+1}$.

**14.** а) $\underbrace{10\ldots0}_{k-l-1}\underbrace{10\ldots0}_{l}$, если $k-l\geqslant2$;

$\underbrace{10\ldots0}_{k+1}$, если $k-l=1$; $1001\underbrace{0\ldots0}_{k-2}$, если $k=$ $=l\geqslant2$; $10+10=101$; $1+1=10$.

б) $\underbrace{100\ldots0}_{2m+1}$; например, $10101+1=100000$

в) $\underbrace{1010\ldots10}_{2m+2}$; например, $10101+10000=$ $=101010$.

**15.** Рассматривая таблицу, где числа записаны в фибоначчиевой системе счисления: нетрудно заметить, что $a_k$ — *последовательность всех натуральных чисел, оканчивающихся в этой системе цифрой 1 или четным числом нулей,* $b_k$ — *последовательность всех чисел, оканчивающихся нечетным числом нулей* (при этом $b_k$ получается из $a_k$ приписыванием одного нуля в конце). Продолжите нашу таблицу, убедитесь, что такая закономерность сохраняется, и докажите это строго. Теперь легко ответить на вопрос о числе 100 (сто): поскольку в системе с базисом *1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,*...$100=89+8+3=$ $=1000010100$, то 100 принадлежит последовательности $a_k$, соответствующие $b_k$ равно $10000101000 = 144+13+5 = 162$, $k = b_k - a_k = 100010100 = 55+5+2 = 62$, т. е. $100 = a_{62}$.

К статье «Закон сохранения магнитного потока»

1. Ток не изменяется.

2. Скорость изменения магнитного потока через катушки пропорциональна скорости изменения тока, то есть постоянна. Это означает, что постоянна э. д. с. индукции во второй катушке. Постоянен и ток.

3. Полный поток через контур должен быть равен нулю. Поток через первую катушку равен по абсолютной величине $0.4\pi \frac{I_1 n_1^2}{l_1} S_1$, а через вторую $0.4\pi \frac{I_2 n_2^2}{l_2} S_2$ ($I_1$ и $I_2$ — величины токов в катушках). Приравнивая эти выражения, получим $\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}$. Учитывая, что $I_1 + I_2 = I$, найдем

$$I_1 = I \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}}{1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}} \quad \text{и}$$

$$I_2 = I \frac{1}{1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{S_2 l_1}{S_1 l_2}}$$

4. Заряд, протекающий по витку, пропорционален изменению пронизывающего его магнитного потока:

$$I \sim \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \text{ а } \Delta Q = I\,\Delta t \sim \Delta\Phi$$

Изменение же магнитного потока пропорционально изменению площади контура.

Если кольцо не сложили, а сжали так, что получилась «восьмерка», то новое значение магнитного потока $\Phi_1$ будет равно $\frac{S_1}{S}\Phi = \frac{5}{8}\Phi$ ($\Phi$ — начальный поток через контур), $\Phi_1 - \Phi = -\frac{3}{8}\Phi$, поэтому $Q_1 = -\frac{3}{8}Q$.

Если, пережав виток, перевернули еще меньшую окружность, то

$$\Phi_1 - \Phi = -\frac{3}{8}\Phi - \frac{1}{16}\Phi + \left(-\frac{1}{16}\Phi\right) = -\frac{1}{2}\Phi \text{ и } Q_2 = -\frac{1}{2}Q.$$

Если переворачивали большую окружность, то

$$\Phi_1 - \Phi = -\frac{3}{8}\Phi - \frac{9}{16}\Phi + \left(-\frac{9}{16}\Phi\right) = -\frac{3}{2}\Phi \text{ и } Q_3 = -\frac{3}{2}Q.$$

Знак минус означает, что направление движения заряда противоположно тому, в котором он протекал при включении поля.

5. Если кольцо сверхпроводящее, то при его движении ток в кольце будет нарастать так, чтобы общий поток магнитной индукции через кольцо не изменялся. Направление тока в кольце будет таким, что кольцо начнет отталкиваться от магнита. В некоторый момент сила, действующая на кольцо со стороны магнита, уравновесит вес кольца, но поскольку кольцо будет иметь в этот момент какую-то скорость, то оно проскочит положение равновесия и будет двигаться дальше до тех пор, пока возросшая сила взаимодействия с магнитом не обратит его скорость в нуль и не заставит двигаться назад. При этом при прохождении через положение равновесия кольцо будет иметь скорость, направленную вверх. Кольцо опять пройдет через положение равновесия и т. д. Так как при прохождении тока по сверхпроводнику тепло не выделяется, то возникнут колебания относительно положений равновесия.

К статье «Вступительные экзамены по математике»

1. $2\sin 3\alpha \sin 5\alpha \cos\alpha$.

2. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

4. 7.

6. $\log_3 2 - 1 < x < 2$.

7. $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

8. $\frac{9}{8} < x < 2$.

9. $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2}$.

10. $x_1 = 5$; $y_1 = 0{,}6$; $x_2 = 14$; $y_2 = 6$.

11. $x_1 = 8$; $y_1 = 1$; $x_2 = 1$; $y_2 = 8$.

12. $x = a\sqrt[3]{b}$, $y = \frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$.

13. $-1 < a < 1$.

14. $a < -3$, $a > 1$.

15. $2 < a < \frac{10}{3}$.

16. $-\frac{1}{12} \leqslant a \leqslant 4$.

17. $-1 < m < 3$.

23. $S_б = \frac{1}{4}\pi b^2 \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

24. $V = -\frac{8}{3} l^3 \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\beta}{\sin^3\frac{\beta}{2}}$

25. 4.

26. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = 2\pi n$

$(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

27. $-3 < x < -1$; $\frac{1}{2} < x < 1$.

28. $x < 0$, $x > 1$.

29. $\frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$, $-1 < x < -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

30. $0 < x < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} < x < 2$.

31. $\frac{1}{2^{\sqrt{2}}} < x < \frac{1}{2}$; $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$.

33. $x = \frac{2a^3}{b\,(a^2+1)}$.

34. $x = 2$.

35. $x = 4$, $y = 3$.

37. $0 < t \leqslant 1$.

К статье «Графики движения»

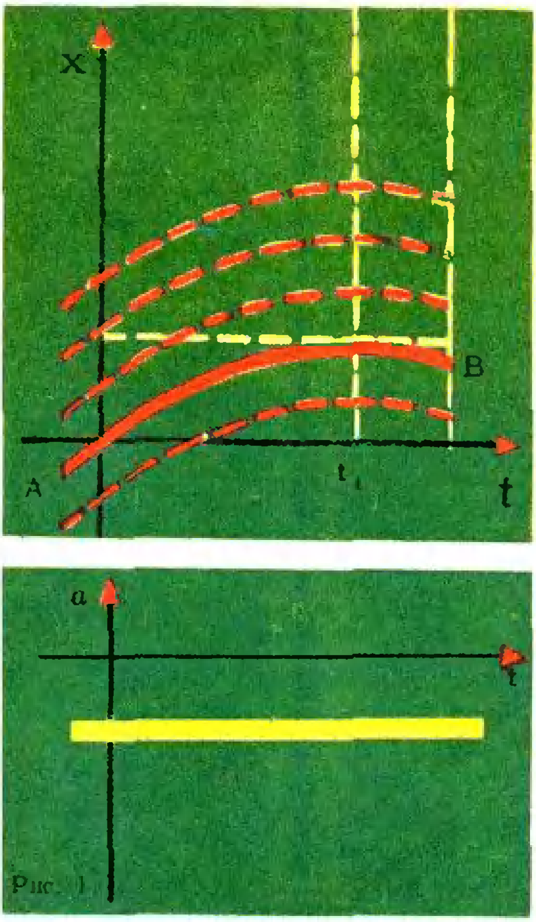
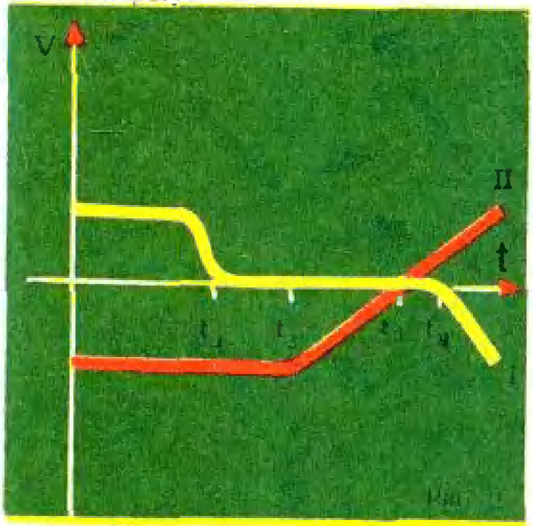



Рис. 1

1. См. рисунок 1. Любая из кривых на верхнем рисунке удовлетворяет графику скорости. Если известно, что $x=0$ при $t=0$, то решением является линия $AB$. Отрицательное $t$ характеризует моменты времени, предшествующие тому, которое считается начальным.

На нижнем рисунке показан график ускорения.

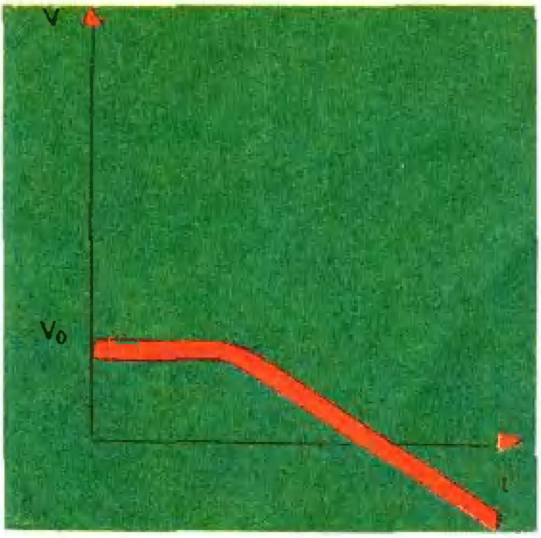
2. См. рисунок 2.

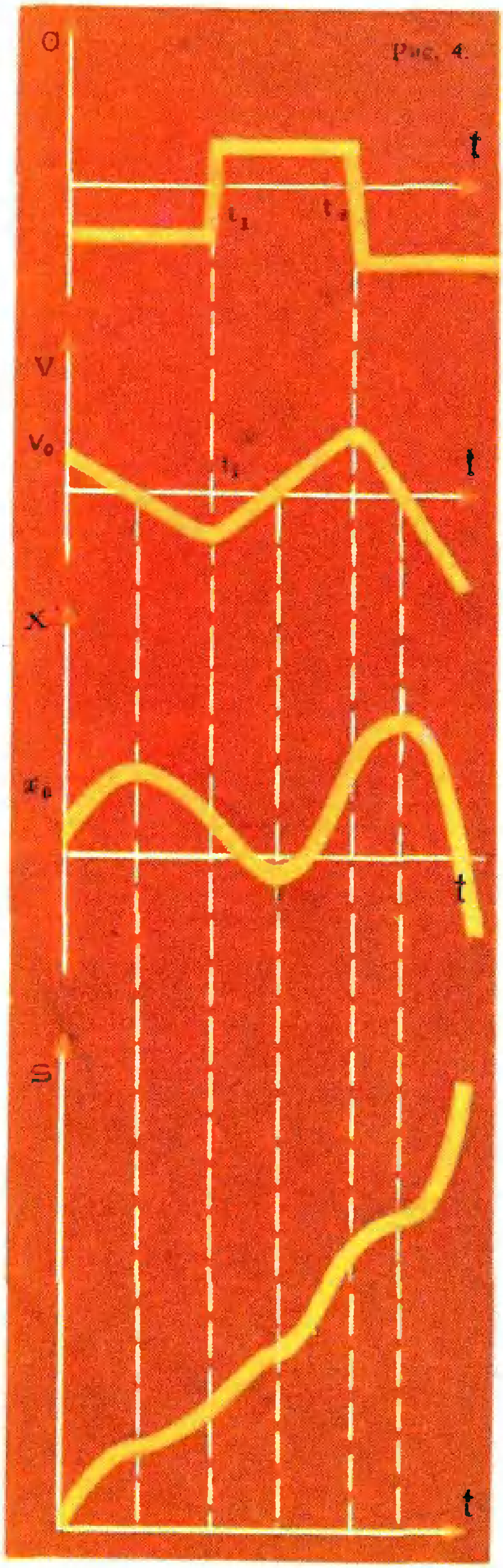



3. См. рисунок 3.

4. См. рисунок 4.

5. Из точек $t=0$ и $t=10$ нужно провести одинаково наклоненные прямые, характеризующие движение первого тела на первом и третьем этапах (белые линии на рисунке 5). Прямая, соединяющая концы проведенных линий, соответствует движению на втором этапе, а скорость на этом этапе $V_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ (если $t$ и $x$ откладываются в одном масштабе). Голубой линией изображено движение второго тела, пересечение линий определяет место и время встречи. 1) $V_2 = 1$ м/сек; 2) $t_1 \approx 0{,}5$ сек, $t_2 = 7$ сек, $x_1 = 1{,}1$ м, $x_2 = 6$ м; 3) $S = 8 + 8 = 16$ м.





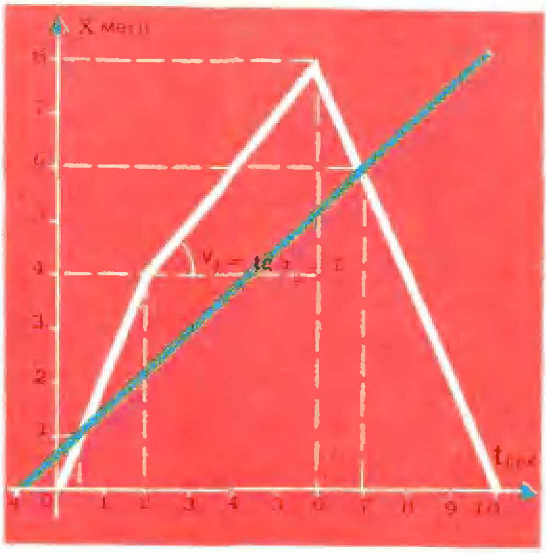
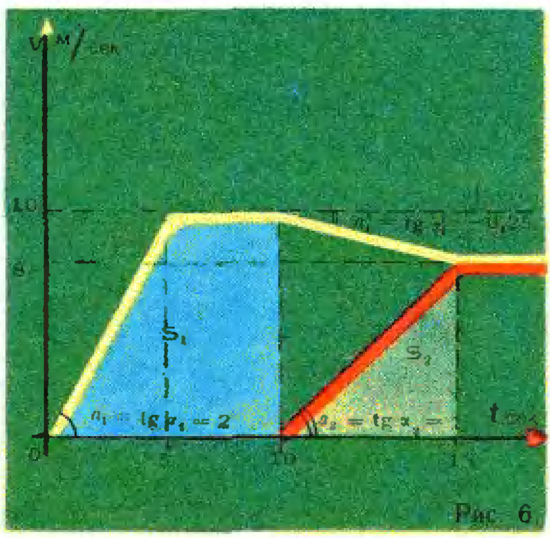




Рис. 5.

6. 1) Желтая линия на рисунке 6 — график скорости первого велосипедиста, а красная — второго. $t = 18$ *сек* с момента выезда первого велосипедиста, $S_2 = \frac{8\cdot 8}{2} = 32$ *м*; 2) $V = 8$ *м/сек*; 3) $S_1 = \frac{5\cdot 10}{2} + 5\cdot 10 = 75$ *м*.

7. Скорости в конце движения одинаковы. Это следует из закона сохранения энергии. Время движения второго шарика меньше (он движется в среднем с большей скоростью).



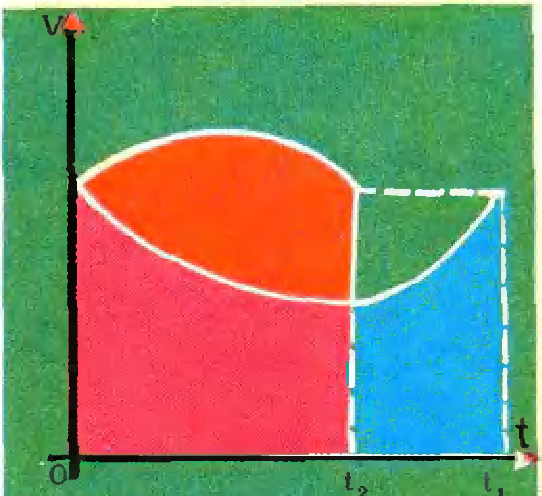



Рис. 7.

Примерные графики скоростей движения шариков показаны на рисунке 7. Так как шарики проходят одинаковые пути, то площади фигур под графиками скоростей должны быть одинаковыми. Для этого $t_1$ должно быть больше $t_2$.

### Ответы на вопросы, помещенные в разделе «Смесь»

1. Число имеет вид $30a \pm b$, где $b=1, 7, 11$ или 13. Поэтому квадрат числа имеет вид $120c+1$ или $120c+49$. Четвертая степень (в обоих случаях) имеет вид $480k+1$. Поэтому остаток от деления $N^4$ на 480 равен 1.

2. Если цена блокнота $x$ коп. (ясно, что $x<100$), то

$$500-5x=100a+b,$$
$$2500-31x=100b+a.$$

Отсюда $3000-36x=101\ (a+b)$,

$$12(250-3x)=101(a+b),$$

поэтому $250-3x$ делится на 101. $250-3x=101k$. При $k=1$ получаем $3x=149$ — это невозможно (149 не делится на 3), при $k=2$ имеем: $250-3x=202$, $x=16$. (Система

$$\begin{cases}500-80=420=100a+b,\\ 2500-496=2004=100a+b\end{cases}$$

имеет очевидное решение $a=4$, $b=20$.)

### К задаче «Признак делимости на 7»

Верно. Разность между рассматриваемыми числами делится на 7, т. к.

$$10^n-3^n=(10-3)\cdot$$
$$\cdot(10^{n-1}+10^{n-2}\cdot 3+\ldots+10\cdot 3^{n-2}+3^{n-1}).$$

В каждом разряде выносится множителем число 7.

### К задаче «Мешок картошки»

Если влажность была 99%, то сухого вещества был 1 кг. В высохшей картошке сухого вещества 2%, но тот же самый 1 кг. Значит, новый вес картошки 50 кг.

### Решение «Карандаш в петлице пиджака»

После нескольких неудачных попыток освободиться от карандаша вам очень захочется, чтобы карандаш мог сжиматься, хотя бы гнуться, или веревка смогла бы растягиваться. Стоп! А ведь, если бы веревка смогла бы растягиваться, то можно было бы освободиться от карандаша и другим способом. Взгляните-ка на рисунок. Представьте себе, если этот рисунок вам не совсем понятен, что вы оторвали от пиджака небольшой кусок вокруг петлицы. Как тогда освободить карандаш?

«Ну и что из того,— скажете вы, — ведь веревка все равно не растягивается, а пиджак большой». А то, что пиджак не карандаш, он отлично гнется, и вместо того чтобы обводить петлю вокруг пиджака, можно отлично протащить пиджак сквозь петлю (достаточно лишь втащить в петлю кусок пиджака размером с длину карандаша, в чем легко убедиться экспериментально).

Задачи такого типа носят название топологических. О топологии — науке, изучающей, в частности, свойства фигур, сохраняющихся при любых деформациях этих фигур изгибах, растяжениях и т. п., мы расскажем в одном из номеров «Кванта».

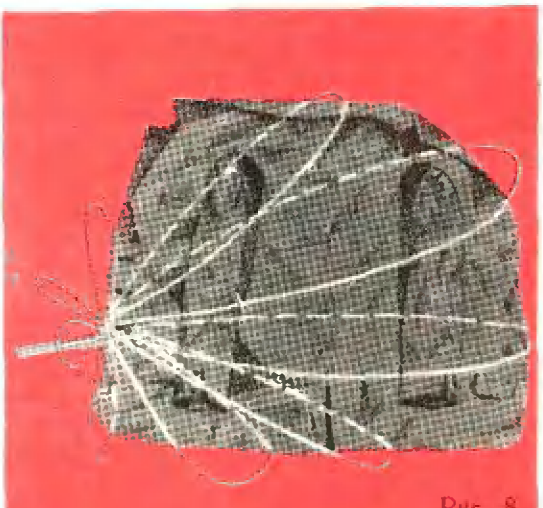


Рис. 8.

# идет редакционная почта

Ежедневно почта доставляет в редакцию «Кванта» пачки писем, по которым, кажется, можно изучать географию: обратные адреса называют десятки знакомых и незнакомых городов и сел нашей страны. Они разные, эти читательские обращения. В одних — запросы о возможности подписаться, в других — совет, как лучше сделать журнал, в третьих — решение опубликованных задач или же задачи, придуманные самими авторами писем.

Особенно много откликов пришло на первый номер. И тут приятно отметить, что подавляющее большинство писем — от школьников. Впрочем, иногда о впечатлениях рассказывают не сами ученики, а их родители. Таким образом, напрашивается вывод, что журнал достиг адресата — его читают в основном те, для кого он и создан. Вместе с тем отрадно, что среди наших корреспондентов есть преподаватели математики и физики, студенты召 пединститутов, инженеры, рабочие...

Конечно, в первую очередь нас интересовала общая оценка журнала. В тех письмах, которые мы получили до сих пор, она в основном благоприятна, хотя корреспондентам вполне могло испортить настроение двухмесячное опоздание первого номера. Большинство так и написало: журнал понравился, несмотря на то, что его доставили с большим опозданием... Огорчила задержка с выходом «Кванта» и редакцию, которая приносит подписчикам свои глубокие извинения и одновременно сообщает, что она предпринимает все возможные меры для своевременного выхода очередных номеров журнала.

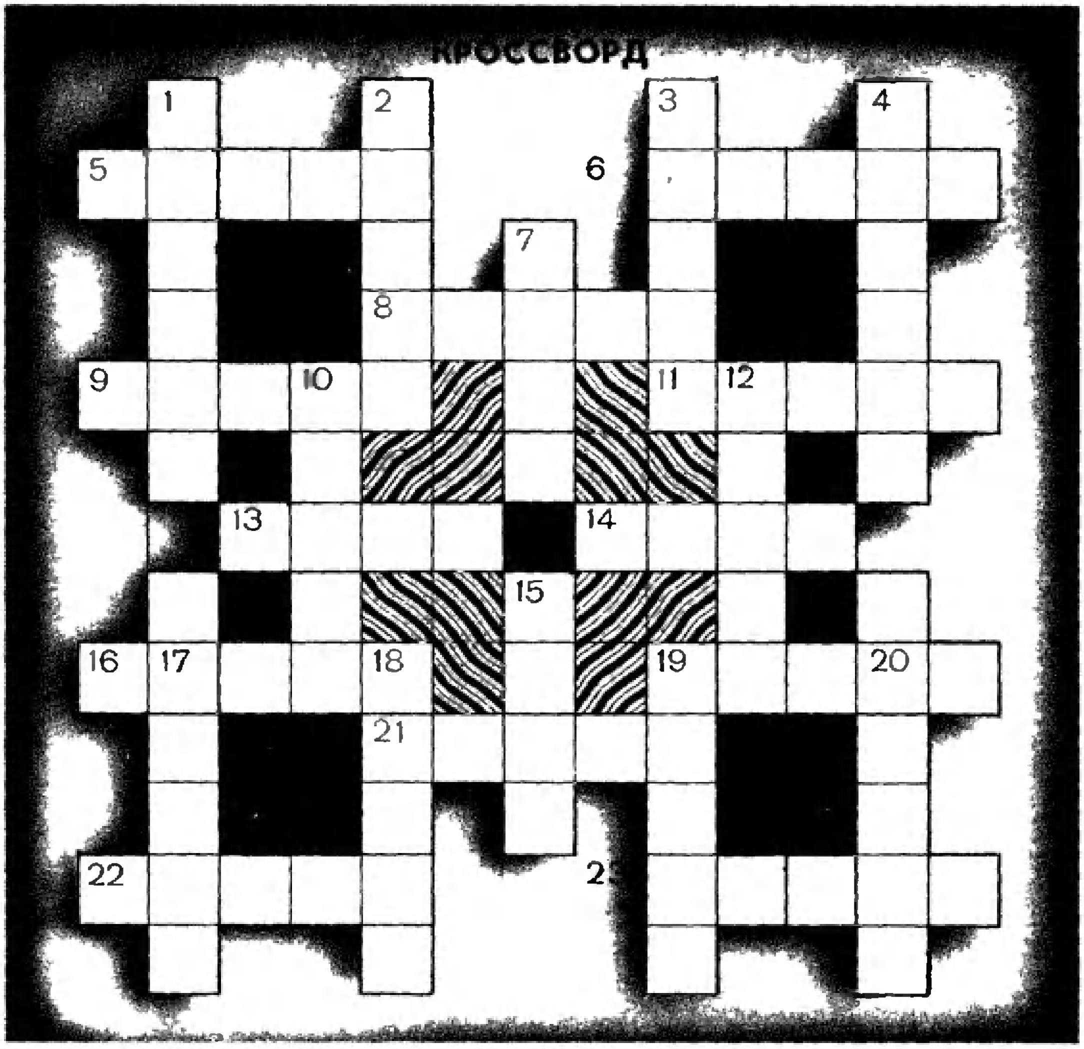
Что же понравилось читателям? Некоторые сообщают не только о своем общем впечатлении... «Журнал нужен особенно тем, кто по-настоящему любит физику и математику... Очень хорошо, что по нему надо работать. Я с удовольствием работала со статьями А. Н. Колмогорова «Что такое функция», И. Ш. Слободецкого «Сухое трение», с интересом читала о том, что волнует физиков в настоящее время» (Кузьмина Елена, ученица 10 класса, ст. Редкино, пос. Северный Калининской области). «Уже в первом номере печатались такие интересные статьи, как ни в каком другом журнале для учащихся. Есть хорошие задачи по математике и физике. Печатайте побольше трудных задач, интересных» (Вл. Брит, ученик 10 класса, Гомель). «В меня журнал верит. Все ли понятно? Конечно, нет. Но Вы, пожалуйста, верьте, я буду и хочу работать» (П. Садовников, ученик 8 класса, Ворошиловград).

Примечательно, что в письмах, присланных из сельской местности, ощущается живой интерес ребят к математике и физике, стремление ни в чем не уступать городским. И журнал, по их мнению, оказывает им в этом серьезную помощь.

Особенно много откликов на материалы третьей страницы обложки. Не совсем обычные кроссворды и шифровки, как и предполагалось, заинтересовали широкий круг читателей — от шестиклассников до студентов.

Читатель нашего журнала — человек зоркий, внимательный. Он подмечает не только явные ошибки, но, порой, даже незначительные шероховатости и досадные мелочи. Так, много критических замечаний было вызвано помещенными в журнале устарелыми данными о сроках приема в заочную математическую школу. Принципиально, по-деловому и доброжелательно покритиковали редакцию и авторов некоторых материалов читатели М. Певзнер из пос. Зеленоборского Мурманской области, М. Болотников из Москвы, И. Рабинович из Риги и другие. Сделанные ими замечания вполне справедливы, и редакции остается только поблагодарить их за это.

Конечно, обо всем в кратком обзоре не расскажешь. Добавим лишь, что все добрые пожелания, справедливые замечания или дельные советы, которые приходят к нам в любом из конвертов, мы постараемся учесть.




**По горизонтали:**

5. Характеристика крыла.
6. Единица измерения.
8. Поверхность.
9. Основное понятие из геометрии
11. Часть кометы.
13. Слагаемое ряда.
14. Множество, удовлетворяющее определенным требованиям
16 Часть цепочки.
19. Математический знак.
21. Способ, который позволяет найти реение задачи.
22. Геометрический термин.
23. Крупный французский математик, ітор учебника по элементарной геометрии.

**По вертикали:**

1. Французский математик и механик, живший в XVIII—XIX столетиях.
2. Физическое понятие, о котором говорится в законах механики Ньютона.
3. Польский математик, живший в XX веке.
4 Великий немецкий математик.
7. Измерительный прибор.
10. Единица измерения.
12. Единица измерения.
15. Механическое устройство
17. Часть траектории искусственного спутника.
18. Часть сооружения.
19. Выдающийся советский мвтематик и астроном.
20 Алгебраический термин.

**Ответ на кроссворд, опубликованный в «Кванте» № 5.**

**По горизонтали:**

31 416; 5) 168; 6) 221; 8) 13; 9) 360; 11) 84; | 90; 13) 80; 14) 18; 15) 437; 17) 90; 18) 648; | 216; 22) 10 800.

**По вертикали:**

1) 3183; 2) 3120; 3) 36; 4) 62; 5) 13 986; 7) 18 096; 10) 693; 15) 4802; 16) 7200; 19) 41; 21) 10.

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 6